MAGE

Résolution des équations de Barré de Saint-Venant 1D en réseaux complexes

Documentation théorique et notice d'emploi

Jean-Baptiste FAURE

INRAE, Unité de Recherche RiverLy
Équipe Hydraulique des Rivières
Centre Lyon-Grenoble Auvergne-Rhône-Alpes,
5, rue de La Doua, CS 20244
69625 Villeurbanne Cedex – France

Version de la documentation :
29/01/2024 – révision 1681
Version de MAGE : 8.0.x

janvier 2024

Avertissement

Ce document est une présentation générale de MAGE. Ayant finalement renoncé à attendre d'avoir produit un texte complet qui me satisfasse pleinement avant de le mettre à disposition des utilisateurs, je tiens à avertir le lecteur que ce document est donc inachevé et plein de lacunes. Je pense cependant que même ainsi il pourra lui être de quelque utilité.

Pour tout complément d'information concernant cette documentation, vous pouvez prendre contact par courrier électronique avec l'auteur : *jean-baptiste.faure@inrae.fr*

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction – Résumé

MAGE est un logiciel de simulation monodimensionnelle d'écoulement en rivière en régime transitoire. Son domaine d'application privilégié est la simulation des crues et des zones inondées. Les équations utilisées sont les équations de Barré de Saint-Venant avec la formule de perte de charge de Manning-Strickler.

MAGE prend en compte la géométrie réelle du lit de la rivière défini par des profils en travers et utilise une modélisation géométrique de la rivière en lit composé – mineur, moyen (majeur actif) et majeur de stockage – avec calcul de la répartition des débits. La possibilité de définir des casiers accroît encore la souplesse de modélisation des échanges entre zones d'écoulement et zones de stockage.

La topologie du réseau peut être maillée ce qui permet de représenter des diffluences (îles) et des conditions aval multiples (deltas).

D'autre part MAGE est particulièrement adapté à la simulation de la gestion des ouvrages d'un réseau hydraulique complexe. La possibilité offerte à l'utilisateur expérimenté d'inclure au code de base ses propres routines, permet de simuler des règles de gestion aussi complexes qu'il est nécessaire.

La discrétisation des équations de Saint-Venant est faite selon un schéma aux différences finies semi-implicite à quatre points (schéma de Preissmann).

MAGE se compose d'un solveur (le code MAGE proprement dit), de divers programmes externes et d'une interface graphique qui permet de construire un modèle numérique (saisie des données, définition des paramètres de calcul), d'interpoler les profils en travers nécessaires (maillage), de lancer le solveur et d'afficher les résultats sous différentes formes. Le présent document ne concerne que le solveur qui peut parfaitement être utilisé en ligne de commande.

MAGE est programmé en Fortran (norme 2018) ce qui permet de produire un exécutable pour toutes sortes de plateformes. En particulier MAGE est disponible pour MS-Windows et pour Linux sur plateformes Intel 32 et 64 bits.

1.1. Ce que peut faire MAGE

1. MAGE résout les équations de Saint-Venant monodimensionnelles en formulation section-débit ; soit :

Équation de continuité : $$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x} = q = q_{apports}-\frac{\partial S_{majeur}}{\partial t}+q_{déversements} \tag{1.1}$$

Équation dynamique : $$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta\frac{Q^2}{S}\right)+gS\frac{\partial Z}{\partial x} = -gS\left(J+J_S\right) + kqV \tag{1.2}$$

+ Conditions Initiales et Conditions aux Limites

avec :

t le temps	x l'abscisse en long
S la section mouillée	Q le débit
Z la cote de la surface libre	V vitesse moyenne : $V = Q/S$
β le coefficient de quantité de mouvement	g la gravité

J les pertes de charge linéaires par frottement

Js pertes de charge singulières : élargissement ou rétrécissement brusques

q les pertes ou apports latéraux (en m^2/s) (ruissellement, pluie, déversements, échanges avec le lit majeur) et $k = 1$ si $q < 0$, $k = 0$ sinon.

2. Le réseau (i.e. un ensemble de branches ou biefs qui se rejoignent en des nœuds) peut être aussi complexe qu'on le désire : il peut aussi bien être *maillé* (présence de défluents) que *ramifié* (seulement des confluents). Si les conditions aval sont multiples alors le réseau est maillé.

3. Les conditions aux limites amont sont de type débit donné variable avec le temps : on fournit un hydrogramme Q(t) au nœud amont de chaque bief amont du réseau. Sous la même forme on peut introduire un débit d'apport (>0) ou de fuite (<0) ponctuel en n'importe quel nœud qui ne porte pas de condition aval.

   On ne peut pas avoir de diffluence au niveau d'une condition à la limite amont : les conditions aux limites sont affectées à des biefs ; il doit y avoir un seul bief par condition à la limite amont.

   Outre les conditions aux limites amont, les apports en volume tels que les ruissellements et infiltration ou l'évaporation peuvent être modélisés par des apports répartis (apports latéraux) le long de tronçons choisis par l'utilisateur. Ces apports sont fournis à MAGE comme des hydrogrammes (en m^3/s) que le programme transforme automatiquement en débits linéïques (en m^2/s).

4. Pour les conditions aux limites aval on peut choisir entre les deux types suivants :
   soit en cote donnée variable avec le temps : on fournit un limnigramme Z(t) ;
   soit sous la forme d'une loi de tarage Q(Z).

   On ne peut pas avoir de confluent au niveau d'une condition à la limite aval : les conditions aux limites sont affectées à des biefs ; il doit y avoir un seul bief par condition à la limite aval.

5. La liaison entre les biefs interconnectés est faite par l'intermédiaire des équations aux nœuds. On suppose qu'il n'y a pas de perte de charge aux nœuds, ce qui conduit à admettre l'égalité des cotes dans les sections aval de tous les biefs qui arrivent au nœud et dans les sections amont de tous les biefs qui en partent. D'autre part on admet qu'il y a conservation des volumes au passage des nœuds.

6. MAGE peut simuler des débordements dans un lit moyen et/ou majeur. Plus précisément, en période de crue on peut distinguer dans une section en travers de rivière 3 sous-sections dans lesquelles l'eau est à la même cote :
   un lit mineur où il y a toujours un écoulement,
   un lit moyen (majeur actif) gauche [resp. droit] où il y a un écoulement seulement si la cote de l'eau dépasse la cote du point du profil qui marque la limite gauche [resp. droite] du lit mineur.

   Le lit majeur de stockage, s'il existe, peut être représenté par un ou plusieurs casiers de stockage interconnectés.

   On rappelle qu'une section (ou profil) en travers est représentée de façon discrète par un ensemble de triplets (X ; Y ; cote) ; voir le chapitre 9.11.1 pour plus de détails.

   La répartition de débit ainsi que la différence de vitesse moyenne (vitesse débitante) entre lit mineur et lits majeurs actifs peuvent être modélisées soit par la formulation *Debord* [10], soit par la méthode ISM (*Independent subsections Method*) [Ref biblio]. Si on utilise la formulation *Debord* les lits moyens gauche et droit sont considérés globalement comme un seul lit moyen.

   De plus MAGE peut simuler le stockage dans un casier latéral séparé de l'écoulement principal par une digue. L'échange de volume se fait par un débit latéral (positif ou négatif) estimé à partir de la différence de cote entre l'écoulement principal et le casier latéral. Plusieurs types d'échanges peuvent être simulés : déversements noyés ou dénoyés, évaporation ou infiltration dans le fond du casier latéral.

7. On peut avoir un effet de laminage aux nœuds. L'équation de continuité des volumes prend alors en compte le stockage dans le nœud. On a dans ce cas ce qu'on appellera un « nœud à surface non nulle ». Sur une durée *Dt* le volume sortant du nœud est égal au volume entrant moins la variation du volume stocké. Le volume stocké dans le nœud est calculé grâce à la loi cote-surface du nœud fournie par l'utilisateur.

8. MAGE peut prendre en compte deux types de singularités :

a. Les élargissements et rétrécissements brusques simulés par une perte de charge dite singulière. Ces singularités sont repérées automatiquement par MAGE sur des critères géométriques.

b. Les ouvrages qui interrompent l'écoulement normal et dont le fonctionnement ne relève pas des équations de Saint-Venant. Ces singularités doivent être décrites par l'utilisateur. Actuellement on peut définir :

- des déversoirs-orifices (à ouverture ou hauteur variable) ;
- des vannes (à ouverture variable) ;
- des portes à la mer ou clapets ;
- des pompes ;
- des déversoirs latéraux ;
- des buses circulaires ;
- des orifices-voûtes.

c. Entrent dans la catégorie des singularités les « marches d'escalier » dans le profil en long qui fonctionnent comme des déversoirs dénoyés : elles doivent être simulées par des déversoirs de hauteur quasi-nulle.

9. La condition initiale peut-être soit une ligne d'eau permanente (fournie par l'utilisateur ou calculée par MAGE) soit une ligne d'eau transitoire calculée précédemment par MAGE.

1.2. Ce que ne peut pas faire MAGE

1. Simuler avec précision des écoulements torrentiels (Froude > 1). Cependant si un passage localisé en torrentiel se produit à cause d'une variation brutale de la géométrie du bief (par exemple à cause de la présence d'une marche fonctionnant comme un déversoir dénoyé) on pourra le simuler en introduisant un seuil, donc une section singulière à l'endroit de la singularité géométrique.
   Par ailleurs depuis la version 6.7 MAGE dispose d'une procédure pour prendre en compte les écoulements torrentiels de façon approchée (voir chapitre 13.4.) Les résultats fournis par cette procédure doivent être utilisés avec beaucoup de prudence s'ils concernent les zones à enjeu de l'étude.
2. Prendre en compte d'éventuelles pertes de charge aux nœuds. En particulier on ne peut pas tenir compte de l'angle sous lequel se fait une confluence ou une diffluence.
3. Simuler des biefs (vraiment) secs.

1.3. Quelques études réalisées à INRAE avec le code MAGE

<u>Wateringues</u> (1990 – 1994) : développement d'un modèle général des Wateringues (ancienne Région Nord – Pas-de-Calais) pour l'institution interdépartementale Nord – Pas-de-Calais pour la réalisation des ouvrages généraux d'évacuation des crues de la région des Wateringues.

Le modèle est opérationnel depuis juillet 1994. Le réseau simulé, plus de 200 km, comprend l'Aa, le canal de Calais, le canal à grand gabarit, la rivière d'Oye, le canal de Bergues, soit les principaux émissaires depuis l'écluse des Flandres jusqu'à la mer du Nord.

<u>Étude hydraulique du Lac de Grand-Lieu</u> (1992) : simulation de l'évacuation des crues du lac de Grand-Lieu selon divers scénarios de modification de la gestion du lac.

<u>Apports du Rhône à la Méditerranée</u> (1991) : simulation du Rhône depuis Arles jusqu'à la mer pour déterminer la répartition des débits entre le petit Rhône et le Grand Rhône jusqu'à la crue centennale.

<u>Modélisation du Marais de Moëze (Charente Maritime)</u> (1992) : l'objectif de cette étude était de quantifier les impacts hydrologiques du drainage enterré à l'échelle d'un marais agricole de 2174 ha. Cet ancien marais salant est caractérisé par un réseau hydraulique extrêmement complexe puisque 470 km de fossés

serpentent entre 2000 bassins. Ce travail a été réalisé au cours d'une thèse de doctorat au Muséum National d'Histoire Naturelle.

Simulation hydrauliques dans le cadre de la méthode Inondabilité (1991-1995) : La Bourbre : mise à disposition d'un modèle général. Le Rival. l'Égrenne.

Depuis 1995 : Casier de Bac-Hung-Hai sur le Fleuve Rouge (Vietnam), Ardèche, Saar (projet européen NOAH pour l'évaluation de l'influence de la précision des données géométriques), Hogneau, Lèze, Yzeron, Moselle, etc.

Des assistances à la modélisation ont été apportées à divers bureaux d'étude ou laboratoires de recherche ; on peut citer par exemple le Rhône entre le lac Léman et Lyon (Burgeap).

Modélisation de l'Ardèche (2001 et 2006) : étude sur la prévision des inondations.

Modélisation du Rhône (2009 – 2021) depuis le lac Léman jusqu'à la mer Méditerranée pour l'étude du transport des sédiments fins et des polluants qui se fixent dessus tels que les PCB.

Modélisation de l'Adour maritime (2020 – 2021) : réalisation pour le SPC d'un modèle à casiers reproduisant mieux les effets cumulés de la marée et des crues sur l'Adour, le Gave de Pau, le Gave d'Oloron et la Nive.

1.4. Terminologie

Écoulement à surface libre : tout écoulement ayant une surface en contact avec l'atmosphère. Cette surface est dite surface libre.

Écoulement uniforme : un écoulement est dit uniforme lorsque les grandeurs qui le caractérisent sont constantes le long du canal. En particulier, si la pente du fond est constante, la ligne d'eau est parallèle au fond.

Écoulement varié : se dit d'un écoulement dont les grandeurs qui le caractérisent varient le long du canal. On distingue l'écoulement graduellement varié de l'écoulement rapidement varié.

Écoulement permanent (ou stationnaire) : un écoulement est dit permanent lorsque les grandeurs qui le caractérisent sont indépendantes du temps.

Écoulement transitoire (ou instationnaire) : un écoulement est dit transitoire lorsque les grandeurs qui le caractérisent varient avec le temps.

Lit mineur : le lit d'écoulement ordinaire du cours d'eau.

Lit moyen (ou lit majeur actif) : le lit d'écoulement du cours d'eau en crue débordante. La vitesse de l'écoulement y est sensiblement différente de celle du lit mineur (en général plus faible en raison des frottements qui y sont plus importants que dans le lit mineur).

Lit majeur (ou lit majeur de stockage) : le lit de débordement du cours d'eau en crue exceptionnelle. La vitesse d'écoulement y est quasiment nulle.

Bief : une portion plus ou moins régulière du cours d'eau où l'écoulement est plus ou moins homogène.

Section du cours d'eau : C'est la section représentant la géométrie du cours d'eau dans un plan vertical perpendiculaire à l'axe du cours d'eau.

Section mouillée S : il s'agit de la partie de la section du cours d'eau délimitée par les parois et la surface libre.

Largeur au miroir L : largeur de la section mouillée au niveau de la surface libre.

Périmètre mouillé P : longueur de la section mouillée en contact avec les parois.

Rayon hydraulique R : le rapport S/P. Pour un cours d'eau très large devant sa profondeur, le rayon hydraulique est voisin de la profondeur.

Pente du cours d'eau I : pente du fond du cours d'eau suivant son axe d'écoulement. La pente est prise positive si le cours d'eau est descendant dans le sens de l'écoulement : $I=-\frac{\partial Z_f}{\partial x}$

Célérité des ondes c : C'est la vitesse de propagation des petites perturbations de la surface libre ; elle est définie par $c=\sqrt{\frac{g \cdot S}{L}}$.

Débit Q : volume d'eau traversant une section par unité de temps.

Vitesse moyenne V (ou U) ou vitesse débitante : elle est définie par le rapport Q/S.

Nombre de Froude F : C'est le rapport de la vitesse de l'écoulement à la célérité des ondes ; il est donné par : $F = \frac{V}{c} = \sqrt{\frac{Q^2 L}{g S^3}}$.

Hauteur d'eau (ou tirant d'eau) y : distance du point le plus bas du lit du cours d'eau à la surface libre.

Hauteur d'eau critique y_c : la hauteur d'eau correspondant au régime critique (F = 1) pour un débit donné.

Hauteur d'eau normale y_n : pour un écoulement donné, c'est la hauteur d'eau de l'écoulement uniforme de même débit dans le même cours d'eau.

Charge H : la charge hydraulique moyenne est définie dans une section par : $H = Z + \frac{V^2}{2g}$

Régime fluvial (ou subcritique) : il s’agit d’un régime d’écoulement caractérisé par une vitesse inférieure à la célérité des ondes, c’est-à-dire un nombre de Froude inférieur à 1. Dans ce type d’écoulement une petite perturbation de la surface libre peut remonter le courant, autrement dit l’écoulement aval a une influence sur l’écoulement amont.

Régime torrentiel (ou supercritique) : il s’agit d’un régime d’écoulement caractérisé par une vitesse supérieure à la célérité des ondes, c’est-à-dire un nombre de Froude supérieur à 1. Dans ce type d’écoulement une petite perturbation de la surface libre ne peut pas remonter le courant, autrement dit l’écoulement aval n’a aucune influence sur l’écoulement amont.

Régime critique : régime d’écoulement caractérisé par un nombre de Froude égal à 1.

Hydrogramme : courbe ou expression donnant le débit en fonction du temps.

Limnigramme : courbe ou expression donnant la cote de la surface libre en fonction du temps.

Loi de tarage : courbe ou expression donnant le débit en fonction de la cote de la surface libre.

Les figures suivantes récapitulent et illustrent une partie du vocabulaire et des définitions que nous venons de voir.

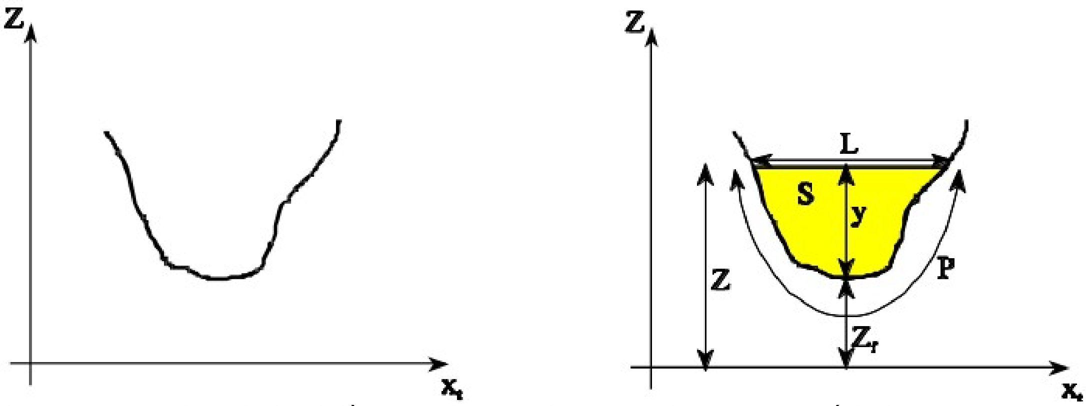


Figure 1 : section de la rivière ou du canal et grandeurs caractéristiques

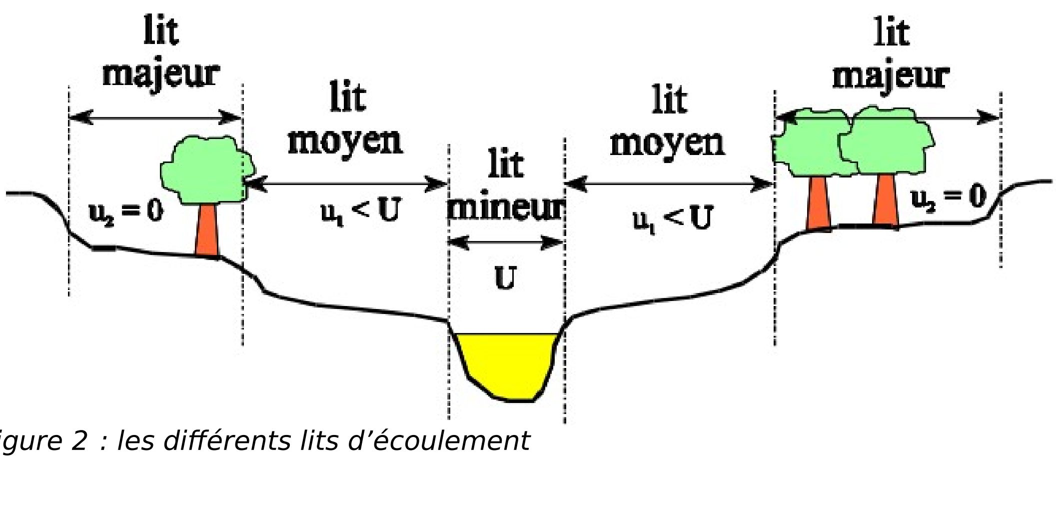


Figure 2 : les différents lits d’écoulement

Partie 1.
Développements théoriques

2. Le domaine d'étude : le réseau hydraulique

Avant d'exposer la méthode de résolution, il est nécessaire de décrire la façon de modéliser le domaine d'étude sur lequel s'appliquent les équations de Saint-Venant. D'une manière générale, le domaine d'étude, aussi appelé réseau hydraulique, est décomposé en biefs ou branches. Chaque bief est alors délimité par un nœud amont et un nœud aval, un nœud pouvant être défini comme un point de liaison entre deux ou plusieurs biefs.

Ce principe de modélisation permet de décrire trois types de réseau hydraulique (Figure 3), allant du bief unique au réseau le plus complexe qui soit.

1. Le premier type de réseau se présente sous la forme d'un bief unique ou de plusieurs biefs mis les uns à la suite des autres, comme le montre la figure de gauche. Dans ce cas le débit qui sort à l'aval d'un bief est le débit qui entre à l'amont du suivant.
2. Le deuxième type de réseau se présente sous la forme de confluents (figure centrale). On parle de réseau ramifié. Dans ce cas le débit qui entre dans le bief aval d'un confluent est la somme des débits qui sortent des biefs amont (en nombre au moins égal à deux) du confluent.
3. Enfin le troisième type de réseau est composé de confluents et de défluents. Il est schématisé par la figure de droite. On parle dans ce cas de réseau maillé. Dans ce cas on ne connaît pas la répartition des débits entre les différents biefs aval d'un diffluence. En particulier cette répartition n'est pas seulement déterminée par le rapport des sections mouillées des différents biefs adjacents. Elle dépend des conditions d'écoulement, en particulier en aval, en raison du caractère hyperbolique des équations de Saint-Venant.

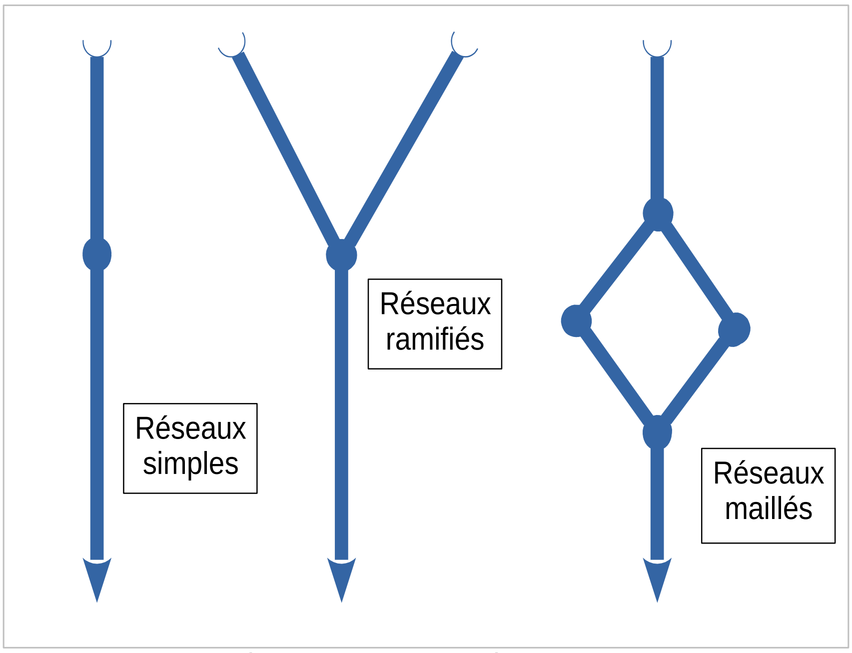


Figure 3: les différents types de réseau hydraulique pris en compte par MAGE

Chaque bief est muni de son propre repère géométrique ce qui permet de définir sur chacun un axe curviligne et donc pour chaque point du bief son abscisse ou point métrique. Chaque point du réseau est donc entièrement déterminé par la donnée de l'identification du bief auquel il appartient et de son abscisse le long de ce bief.

Par ailleurs il n'est pas nécessaire d'orienter l'axe des abscisses curviligne dans un sens lié à celui de l'écoulement, autrement dit les abscisses peuvent être croissantes dans le sens amont-aval aussi bien que dans le sens inverse.

2.1. Le bief et sa géométrie

Un bief est entièrement décrit par une liste de sections en travers qui sont situées le long d'un axe orienté. Chaque section représente un point de calcul. On suppose dans la suite que, pour chaque section, on dispose d'une relation (un moyen de calcul) entre la cote de l'eau (la hauteur d'eau) dans la section, la section mouillée, la largeur au miroir et le périmètre mouillé. Voir le chapitre 1.4 pour un rappel des définitions utiles.

2.2. Les casiers

Les casiers sont des zones de stockage dans lesquelles la vitesse de l'écoulement est négligée. De ce fait ils sont caractérisés par une surface libre horizontale et leur influence sur l'écoulement se traduit par un simple laminage (amortissement + retardement) des débits entrants. En conséquence la seule information géométrique nécessaire pour représenter le fonctionnement d'un casier est une relation V(Z) donnant le volume d'eau stocké en fonction de la cote du plan d'eau. Cela est équivalent à la donnée d'une relation S(Z) donnant la surface du plan d'eau en fonction de sa cote, puisque le volume est l'intégrale de la surface.

Le fonctionnement hydraulique d'un casier est entièrement décrit par l'équation de conservation du volume :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = S(Z)\frac{\partial Z}{\partial t} = \sum Q_{entrants} - \sum Q_{sortants} \tag{2.1}$$

Les casiers sont modélisés dans MAGE par des nœuds du réseau auxquels on affecte une loi S(Z). Cela signifie en particulier que tout casier est nécessairement relié au réseau par au moins un bief avec écoulement non-intermittent.

La condition d'horizontalité du plan d'eau du casier est une contrainte forte qui impose en pratique que le casier ne soit pas trop grand ni trop allongé. En effet dans le cas contraire l'existence d'un écoulement à travers le casier impose une différence de niveau entre l'entrée et la sortie non négligeable pour le code de calcul.

Une autre contrainte du casier est qu'il impose une transmission instantanée d'un signal de débit entre l'entrée et la sortie du casier. Autrement dit un débit entrant commence à sortir aussitôt ce qui peut être significativement erroné si le casier est grand.

3. Les équations de Saint-Venant

3.1. Les hypothèses

Les écoulements fluviaux (rivières, canaux…) entrent dans la catégorie des écoulements à surface libre, et sont de plus dits filaires du fait de la longueur importante de leur domaine d'étude. Il est alors possible, pour ce type d'écoulement, de faire les hypothèses suivantes :

1. L'écoulement a une direction privilégiée (l'axe du cours d'eau). Les vitesses sont alors supposées parallèles à cette direction et peuvent être représentées par une vitesse moyenne en chaque section mouillée. Si v(M) est la vitesse d'un point M, le débit est défini par $Q = \iint_S v(M) dS$ et la vitesse moyenne (ou vitesse débitante) par V = Q/S.
2. Il découle de l'hypothèse précédente que dans une section perpendiculaire à l'axe d'écoulement la surface est horizontale. Il n'y a donc pas de différence de niveau entre la rive gauche et la rive droite.
3. Sur une verticale, la répartition de la pression est hydrostatique : $p = p_0 + \rho g h$ où h est la profondeur d'eau et p_0 la pression à la surface (pression atmosphérique).
4. l'écoulement est presque horizontal, de telle sorte que si I désigne l'angle entre le fond du cours d'eau et l'horizontale, on a *sin(I) ≈ I.*
5. La masse volumique de l'eau est constante.

3.2. Les équations

Sous les hypothèses précédentes et en désignant par q l'ensemble des apports latéraux qui entrent dans le bilan de volume, par β le coefficient de Boussinesq qui évalue la dispersion des vitesses dans la section en travers par rapport à la vitesse moyenne et par Js les pertes de charges singulières dues aux variations brutales de largeur, les équations de Saint-Venant s'écrivent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial t} + \dfrac{\partial Q}{\partial x} = q = q_{apports} - \dfrac{\partial S_{majeur}}{\partial t} + q_{déversements} & \text{(Continuité)} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\beta Q^2}{S}\right) + gS\dfrac{\partial Z}{\partial x} = -gS\left(J + J_S\right) + kqV & \text{(Dynamique)} \end{cases} \quad (3.1)$$

Voir Annexe 1 : établissement des équations de Saint-Venant pour l'établissement classique des équations par analyse des bilans de masse et de quantité de mouvement sur un volume de contrôle.

On peut aussi dériver les équations de Saint-Venant à partir des équations de Navier-Stokes, voir [réf biblio].

3.3. Les modèles complémentaires

3.3.1. Le coefficient de Boussinesq

Le coefficient de Boussinesq β évalue la dispersion des vitesses dans la section en travers par rapport à la vitesse moyenne. En effet les équations de Saint-Venant ne font pas l'hypothèse d'uniformité des vitesses dans une section en travers et donc la vitesse locale peut être sensiblement différente de la vitesse moyenne sans que cela remette en cause la validité des équations. Le coefficient β apparaît naturellement lors de la dérivation des équations de Saint-Venant à partir de celles de Navier-Stokes [Réf biblio] ; cependant on n'a pas encore de moyen de l'évaluer aussi prend-on une valeur de 1 sauf dans le cas d'un débordement en lit moyen (voir chapitre 3.3.5.1).

3.3.2. Les frottements ou pertes de charges linéaires

3.3.2.1. Pertes de charge par frottement

Les pertes d'énergie dues aux frottements sur le fond et les parois du cours d'eau peuvent être représentées par la formule de Manning-Strickler qui exprime la pente de la ligne de charge :

$$J = \frac{|Q|Q}{D^2} \quad \text{avec} \quad D = K.S.R_H^{2/3} \quad \text{où } J \text{ est la pente de la ligne de charge } H = Z + \frac{V}{2} \tag{3.2}$$

où D est la débitance, S la section mouillée, R_H le rayon hydraulique et K le coefficient de Manning-Strickler qui exprime la rugosité des parois (le fond et les berges). K varie de 100 pour des parois lisses à 25, ou moins, pour des parois très rugueuses, c'est l'inverse du coefficient de Manning.

3.3.2.2. Force de traînée

Les pertes d'énergie dues, par exemple, à la présence d'arbres, sont prises en compte à l'aide d'une force de traînée :

$$J = \frac{N.D.C_D.U_i^2}{2g} \tag{3.3}$$

Ici N le nombre d'arbres par m², D le diamètre moyen des arbres, C_D un coefficient de traînée dépendant du type d'obstacle. Le produit $N.D$ représente la surface frontale des obstacles par unité de volume et s'exprime en m^{-1}.

Dans le cas des expériences de laboratoire menées par Victor Dupuis (thèse 2016), on avait $N = 81$, $D = 0{,}01$ et $CD = 1{,}2$.

3.3.3. Les pertes de charges singulières

Le terme Js modélise les pertes de charge dues aux variations brutales de largeur soit en élargissement soit en rétrécissement. En général, et c'est ce qu'on fait dans MAGE, on utilise une formulation selon Borda :

$$J_S = \alpha\left(V_i - V_{i+1}\right)^2 \tag{3.4}$$

où les indices i et i+1 désignent des points de calcul consécutifs, α est un coefficient qui vaut 1 s'il s'agit d'un élargissement et 0 s'il s'agit d'un rétrécissement, ce qui revient à négliger ceux-ci.

On détecte la présence d'un élargissement en comparant non pas les largeurs L_i et L_{i+1} mais des grandeurs équivalentes $\frac{S_i}{y_i}$. Précisément on teste la valeur de :

$$\frac{1}{|x_{i+1} - x_i|}\left[\frac{S_{i+1}}{y_{i+1}} - \frac{S_i}{y_i}\right] \tag{3.5}$$

et si sa valeur dépasse le seuil de 0,1 on considère qu'il y a élargissement brusque.

3.3.4. Les apports latéraux

Le terme q de l'équation de continuité regroupe les différents échanges latéraux qu'il faut prendre en compte dans le bilan de masse. Il est positif s'il s'agit d'entrées dans le réseau et négatif s'il s'agit de prélèvements et s'exprime en m^2/s ($m^3/s/m$)

MAGE reconnaît deux types différents d'échanges latéraux :

1. Les apports ($q > 0$) ou fuites ($q < 0$) tels que le ruissellement, la pluie, les infiltrations ou l'évaporation. Les données de pluie et d'évaporation doivent être ramenées à la largeur au miroir pour tenir compte de la surface du plan d'eau en contact avec l'atmosphère et évaluer un débit linéïques (en m^2/s) à partir d'un débit surfacique (en m^3/s). MAGE fait ce calcul lui-même de sorte que l'utilisateur peut donner les débits de pluie ou d'évaporation en m/s. De manière générale MAGE n'a besoin de recevoir qu'un hydrogramme (un hiétogramme pour la pluie) et la longueur du tronçon sur lequel ce débit est à répartir uniformément.
2. Les échanges latéraux par débordement par-dessus les limites extérieures du profil en travers. MAGE permet de modéliser de tels échanges entre tronçons de biefs différents ou entre un tronçon et un casier. Le débit échangé est calculé en utilisant une loi de déversoir classique permettant de représenter aussi bien un écoulement noyé (*submerged flow*) que dénoyé, le sens du déversement étant déterminé par le code sans intervention de l'utilisateur.
   Voir le chapitre 3.3.5.3 pour une description détaillée de la modélisation des échanges latéraux et de leur fonctionnement.

3.3.5. Les modèles de débordement

MAGE dispose de trois modèles de débordement qui complètent les équations de Saint-Venant classiques :

- Le premier modèle, basé sur la formulation *Debord* [10], généralise les équations de Saint-Venant au cas d'un lit composé mineur + moyen dans lequel la répartition des vitesses dans la section en travers est très hétérogène, en particulier en raison de la différence d'intensité des frottements entre les deux lits. Cette différence dans les frottements est directement liée à la différence de rugosité entre les deux lits mineur et moyen ; en effet le lit moyen n'étant évidemment pas inondé en permanence, est généralement végétalisé ou anthropisé de sorte que sa rugosité est sensiblement différente de celle du lit mineur.
- Le deuxième modèle, basé sur l'*Independent Subsection Method* (ISM) [Ref Biblio], étend les équations de Saint-Venant aux cours d'eau en lit composé avec 3 sous-sections : le lit mineur et les lits majeurs actifs gauche et droit. La méthode ISM consiste à écrire une équation de conservation de la quantité de mouvement par sous-section et une équation de conservation de la masse globale pour toute la section. Ainsi, au lieu de 2 variables Q et S (ou Z) pour les équations de Saint-Venant habituelles, on a un débit par sous-section et une section mouillée globale (ou une cote de la surface libre), soit 4 variables. Le couplage entre les 3 équations de quantité de mouvement est assuré par une modélisation des débits d'échange entre le lit mineur et chacun des lits majeurs. Comme pour le premier modèle, le plan d'eau est supposé horizontal dans la direction perpendiculaire à l'axe de l'écoulement.
- Le troisième modèle est destiné à représenter des déversements par-dessus des digues vers une autre partie du réseau comme un autre bief ou un casier ou encore vers l'extérieur du réseau. Dans ce cas les deux zones qui échangent des volumes ne sont pas au même niveau.

3.3.5.1. Les débordements en lit moyen selon la formulation *Debord*

Le lit moyen est caractérisé par des frottements différents de ceux du lit mineur. On suppose qu'en cas de débordement en lit moyen le plan d'eau reste horizontal dans la direction perpendiculaire à l'écoulement. En conséquence l'influence du débordement sur la ligne d'eau est modélisée par une modification de la loi de perte de charge linéaire de Manning-Strickler. l'interaction entre le lit mineur et le lit moyen est représentée par la formulation *Debord* du L.N.H.E.[1] [10].

1 Laboratoire National d'Hydraulique et Environnement (EDF CHATOU)

En indiçant par m les grandeurs relatives au lit mineur et par M celles relatives au lit moyen, la perte de charge s'écrit :

$$J^{1/2} = \frac{Q_m}{D_m} = \frac{Q_M}{D_M} = \frac{Q_m+Q_M}{D_m+D_M} = \frac{Q}{D} \tag{3.6}$$

où la débitance D est donnée par la formule :

$$D = D_m+D_M = K_m A S_m R_m^{2/3} + K_M \sqrt{S_M^2+S_m S_M\left(1-A^2\right)} R_M^{2/3} \tag{3.7}$$

A représente la loi de variation du débit mineur :

$$\begin{cases} A = 0{,}9\cdot\left(\dfrac{K_m}{K_M}\right)^{-1/6} = A_0 & \text{si } r=\dfrac{R_M}{R_m}>0{,}3 \\ A = \dfrac{1-A_0}{2}\cos\left(\dfrac{\pi r}{0{,}3}\right) + \dfrac{1+A_0}{2} & \text{si } 0 \le r \le 0{,}3 \end{cases} \tag{3.8}$$

avec K_m et K_M les coefficients de Strickler et R_m (resp. S_m) et R_M (resp. S_M) les rayons hydrauliques (resp. les sections mouillées) des lits mineur et moyen.

Le rapport débit mineur sur débit moyen s'écrit alors :

$$\eta = \frac{Q_m}{Q_M} = \frac{D_m}{D_M} = \frac{K_m}{K_M}\frac{A S_m}{\sqrt{S_M^2+S_m S_M\left(1-A^2\right)}}\frac{R_m^{2/3}}{R_M^{2/3}} \tag{3.9}$$

l'interaction entre le lit mineur et le lit moyen est alors restituée par le coefficient de quantité de mouvement qui rend compte de la dispersion des vitesses dans la section en travers par rapport à la vitesse moyenne :

$$\beta = \left(\frac{\eta^2}{S_m}+\frac{1}{S_M}\right)\frac{S}{(1+\eta)^2} \tag{3.10}$$

Cette expression assure la continuité avec la valeur 1 de base quand il n'y a pas débordement vers le lit moyen.

3.3.5.2. Les débordements *selon ISM*

ISM (*Independent Subsections Method*) permet de calculer la ligne d'eau dans chacune des sous-sections (lit mineur et lits moyens gauche et droit) d'un profil en travers.

ISM définit une équation de continuité globale et 3 équations de quantité de mouvement, une pour chaque sous-section. La possibilité d'écrire une équation de continuité globale repose sur l'hypothèse assumée que la cote de l'eau est identique dans chacune des sous-sections.

On a ainsi 3 équations de continuité, où on utilise l'indice m pour le lit mineur, l pour le lit moyen gauche (left) et r pour le lit moyen droit (right) :

$$\frac{\partial S_l}{\partial t}+\frac{\partial Q_l}{\partial x}=q_l^D-q_l \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial t}+\frac{\partial Q_r}{\partial x}=q_r^D-q_r \tag{3.12}$$

q_l [q_r] est le débit d'échange entre le lit mineur et le lit moyen gauche [droit], il est compté positivement dans le sens lit moyen ⟶ lit mineur.

$$\frac{\partial S_m}{\partial t}+\frac{\partial Q_m}{\partial x}=q_m^D+q_l+q_r=q_m^D+q_m \tag{3.13}$$

Avec $q_m=q_l+q_r$, et $S=S_m+S_l+S_r$ la section mouillée totale, l'équation de continuité devient donc :

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial(Q_m+Q_l+Q_r)}{\partial x}=q^D=q_m^D+q_l^D+q_r^D \tag{3.14}$$

où q^D regroupe les apports & pertes latéraux divers dans chacun des 3 lits qui contribuent au bilan de masse, hors échanges latéraux internes : ruissellement, infiltration, pluie directe, évaporation, déversement depuis une autre partie du réseau.

Les équations de quantité de mouvement s'écrivent, en prenant le coefficient de Boussinesq β = 1 :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial Q_m}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q_m^2}{S_m}\right)+gS_m\frac{\partial Z}{\partial x}=-gS_m\left(J_m+J_S\right)+k_m q_m^D\frac{Q_m}{S_m}+\frac{\tau_{ml}h_{ml}}{\rho}+\frac{\tau_{mr}h_{mr}}{\rho}+U_{L,l}q_l+U_{L,r}q_r\\
&\frac{\partial Q_l}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q_l^2}{S_l}\right)+gS_l\frac{\partial Z}{\partial x}=-gS_lJ_l+k_lq_l^D\frac{Q_l}{S_l}+\frac{\tau_{lm}h_{lm}}{\rho}-U_{L,l}q_l\\
&\frac{\partial Q_r}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q_r^2}{S_r}\right)+gS_r\frac{\partial Z}{\partial x}=-gS_rJ_r+k_rq_r^D\frac{Q_r}{S_r}+\frac{\tau_{rm}h_{rm}}{\rho}-U_{L,r}q_r
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Ici τ_{ml} est la contrainte de cisaillement entre le lit mineur et la sous-section gauche, h_{ml} [h_{mr}] est la hauteur de débordement à l'interface entre le lit mineur et le lit moyen gauche [droit] et $U_{L,l}$ [$U_{L,r}$] est la vitesse à l'interface entre le lit mineur et le lit moyen gauche [droit].

On a de plus $\tau_{ml}=-\tau_{lm}$; $\tau_{mr}=-\tau_{rm}$; $h_{ml}=h_{lm}$; $h_{mr}=h_{rm}$

Les coeffi- cients k_m, k_l et k_r valent 1 si le débit d'apport distribué correspondant est négatif et 0 s'il est positif. Cela signifie que les pertes latérales soustraient de la quantité de mouvement alors que les apports latéraux n'en apportent pas, soit que leur vitesse est nulle ou négligeable (pluie) soit qu'elle est perpendiculaire à l'écoulement.

3.3.5.2.1. Équations de fermeture

Les inconnues principales sont Z , Q_m , Q_l et Q_r. Il nous faut donc 6 équations de fermeture pour τ_{ml} et τ_{mr} , $U_{L,l}$ et $U_{L,r}$, q_l et q_r.

Les deux débits de transferts sont évalués en utilisant les équations de continuité 1.1 et 1.2 pour les lits moyens :

$$\begin{aligned}
q_l&=q_l^D-\frac{\partial S_l}{\partial t}-\frac{\partial Q_l}{\partial x}\\
q_r&=q_r^D-\frac{\partial S_r}{\partial t}-\frac{\partial Q_r}{\partial x}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Les termes d'échange turbulent sont supposés être proportionnels au carré de la différence des vitesses adjacentes qu'on assimile aux vitesses moyennes dans chaque lit, soit :

$$\begin{aligned}
\tau_{ml}&=\rho\psi^t(V_m-V_l)^2\\
\tau_{mr}&=\rho\psi^t(V_m-V_r)^2
\end{aligned} \tag{3.17}$$

où ψ^t est le coefficient d'échange turbulent qui est considéré comme un coefficient de calage. En canal prismatique l'ordre de grandeur de ce coefficient est 0,02.

Les vitesses longitudinales de transfert sont définies à partir des vitesses moyennes dans les sous-sections adjacentes :

$$U_{L,l}=\begin{cases}V_l & \text{si} \quad q_l>0\\ V_m & \text{si} \quad q_l\leq 0\end{cases} \qquad U_{L,r}=\begin{cases}V_r & \text{si} \quad q_r>0\\ V_m & \text{si} \quad q_r\leq 0\end{cases} \tag{3.18}$$

En appliquant les équations de fermeture, les 3 équations de quantité de mouvement pour ISM deviennent :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q_m}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q_m^2}{S_m}\right)+gS_m\frac{\partial Z}{\partial x} &= -\ gS_m\left(J_m+J_S\right)\ +\ k_m q_m^D\frac{Q_m}{S_m}\ +\ \frac{\tau_{ml}h_{ml}}{\rho}+\frac{\tau_{mr}h_{mr}}{\rho}\\
&\quad +\ U_{L,l}\left(q_l^D-\frac{\partial S_l}{\partial t}-\frac{\partial Q_l}{\partial x}\right)\ +\ U_{L,r}\left(q_r^D-\frac{\partial S_r}{\partial t}-\frac{\partial Q_r}{\partial x}\right)\\
\frac{\partial Q_l}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q_l^2}{S_l}\right)+gS_l\frac{\partial Z}{\partial x} &= -gS_lJ_l+k_lq_l^D\frac{Q_l}{S_l}+\frac{\tau_{lm}h_{lm}}{\rho}-U_{L,l}\left(q_l^D-\frac{\partial S_l}{\partial t}-\frac{\partial Q_l}{\partial x}\right)\\
\frac{\partial Q_r}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q_r^2}{S_r}\right)+gS_r\frac{\partial Z}{\partial x} &= -\ gS_rJ_r+k_rq_r^D\frac{Q_r}{S_r}+\frac{\tau_{rm}h_{rm}}{\rho}-U_{L,r}\left(q_r^D-\frac{\partial S_r}{\partial t}-\frac{\partial Q_r}{\partial x}\right)
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Soit, en regroupant :

$$\begin{gathered}
\frac{\partial Q_m}{\partial t}\ +\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q_m^2}{S_m}\right)\ +\ gS_m\frac{\partial Z}{\partial x}\ +\ U_{L,l}\frac{\partial S_l}{\partial t}\ +\ U_{L,l}\frac{\partial Q_l}{\partial x}\ +\ U_{L,r}\frac{\partial S_r}{\partial t}\ +\ U_{L,r}\frac{\partial Q_r}{\partial x}\\
=\\
-\ gS_m\left(J_m+J_S\right)\ +\ k_mq_m^D\frac{Q_m}{S_m}\ +\ \frac{\tau_{ml}h_{ml}}{\rho}\ +\ \frac{\tau_{mr}h_{mr}}{\rho}\ +\ U_{L,l}q_l^D\ +\ U_{L,r}q_r^D
\end{gathered} \tag{3.20}$$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial Q_m}{\partial t}\ +\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q_m^2}{S_m}\right)\ +\ U_{L,l}\frac{\partial Q_l}{\partial x}\ +\ U_{L,r}\frac{\partial Q_r}{\partial x}\ +\ gS_m\frac{\partial Z}{\partial x}\ +\ \left(U_{L,l}L_l+U_{L,r}L_r\right)\frac{\partial Z}{\partial t}\\
=\\
-\ gS_m\left(J_m+J_S\right)\ +\ k_mq_m^D\frac{Q_m}{S_m}\ +\ \frac{\tau_{ml}h_{ml}}{\rho}\ +\ \frac{\tau_{mr}h_{mr}}{\rho}\ +\ U_{L,l}q_l^D\ +\ U_{L,r}q_r^D
\end{gathered} \tag{3.21}$$

De même :

$$\frac{\partial Q_l}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q_l^2}{S_l}\right)+gS_l\frac{\partial Z}{\partial x}-U_{L,l}L_l\frac{\partial Z}{\partial t}-U_{L,l}\frac{\partial Q_l}{\partial x}\ =\ -gS_lJ_l+k_lq_l^D\frac{Q_l}{S_l}-\frac{\tau_{ml}h_{ml}}{\rho}-U_l \tag{3.22}$$

Et :

$$\frac{\partial Q_r}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q_r^2}{S_r}\right)+gS_r\frac{\partial Z}{\partial x}-U_{L,r}L_r\frac{\partial Z}{\partial t}-U_{L,r}\frac{\partial Q_r}{\partial x}\ =\ -\ gS_rJ_r+k_rq_r^D\frac{Q_r}{S_r}-\frac{\tau_{mr}h_{mr}}{\rho}-l \tag{3.23}$$

3.3.5.2.2. Forme alternative pour les équations en lits moyens

Les équations 3.10 et 3.11 ne font pas intervenir Q_m ce qui peut être problématique pour assurer le couplage des 3 équations dynamiques. En repartant de $q_m=q_l+q_r$ on peut les réécrire de la façon suivante (exemple de l'équation pour le lit moyen gauche) :

$$\frac{\partial Q_l}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q_l^2}{S_l}\right)+g S_l\frac{\partial Z}{\partial x}=-g S_l J_l+k_l q_l^D\frac{Q_l}{S_l}+\frac{\tau_{lm}h_{lm}}{\rho}-U_{L,l}(q_m-q_r)$$

$$\frac{\partial Q_l}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q_l^2}{S_l}\right)+g S_l\frac{\partial Z}{\partial x}=-g S_l J_l+k_l q_l^D\frac{Q_l}{S_l}+\frac{\tau_{lm}h_{lm}}{\rho}-U_{L,l}\left(q_m^D-\frac{\partial S_m}{\partial t}-\frac{\partial Q_m}{\partial x}-q_r^D+\frac{\partial S_r}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial}\right. \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial Q_l}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q_l^2}{S_l}\right)+g S_l\frac{\partial Z}{\partial x}=-g S_l J_l+k_l q_l^D\frac{Q_l}{S_l}+\frac{\tau_{lm}h_{lm}}{\rho}-U_{L,l}\left(q_m^D-L_m\frac{\partial Z}{\partial t}-\frac{\partial Q_m}{\partial x}-q_r^D+L_r\frac{\partial Z}{\partial t}+\right.$$

En regroupant dans le membre de gauche toutes les dérivées partielles, on obtient :

$$\begin{aligned}&\frac{\partial Q_l}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q_l^2}{S_l}\right)+g S_l\frac{\partial Z}{\partial x}-U_{L,l}(L_m-L_r)\frac{\partial Z}{\partial t}-U_{L,l}\frac{\partial Q_m}{\partial x}+U_{L,l}\frac{\partial Q_r}{\partial x}\\&= -g S_l J_l+k_l q_l^D\frac{Q_l}{S_l}+\frac{\tau_{lm}h_{lm}}{\rho}-U_{L,l}(q_m^D-q_r^D)\end{aligned} \quad (3.25)$$

De même pour le lit moyen droit :

$$\begin{aligned}&\frac{\partial Q_r}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q_r^2}{S_r}\right)+g S_r\frac{\partial Z}{\partial x}-U_{L,r}(L_m-L_l)\frac{\partial Z}{\partial t}-U_{L,r}\frac{\partial Q_m}{\partial x}+U_{L,r}\frac{\partial Q_l}{\partial x}\\&= -g S_r J_r+k_r q_r^D\frac{Q_r}{S_r}+\frac{\tau_{rm}h_{rm}}{\rho}-U_{L,r}(q_m^D-q_l^D)\end{aligned} \quad (3.26)$$

3.3.5.3. Les déversements ou échanges latéraux

L'objectif de ce modèle de débordement est de représenter les échanges latéraux de débit entre zones de niveaux différents comme C'est le cas lors des déversements par-dessus une digue. Les deux figures ci-dessous donnent des exemples de telles situations dans lesquelles les modèles de lit moyen ou majeur ne sont pas applicables. Dans le premier exemple on a un déversement à travers une brèche dans la berge vers un casier dont le fond est plus bas que celui de la brèche ; de ce fait le niveau dans le casier est plus bas que la ligne d'eau, du moins au début du déversement.

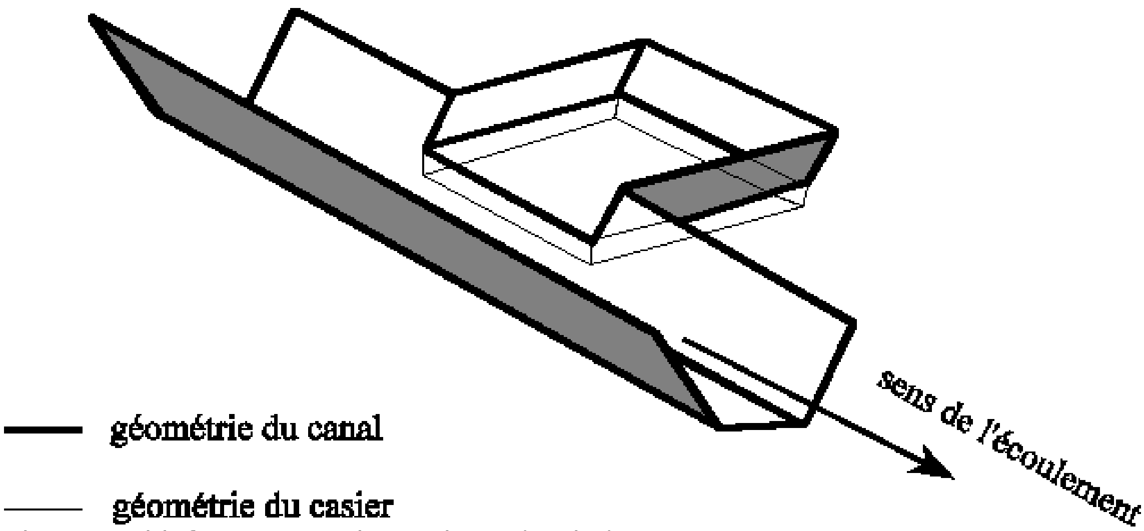


Figure 4 : bief avec zone de stockage (casier)

Dans le deuxième exemple on simule un déversement d'un bief dans un autre à travers une zone tampon.

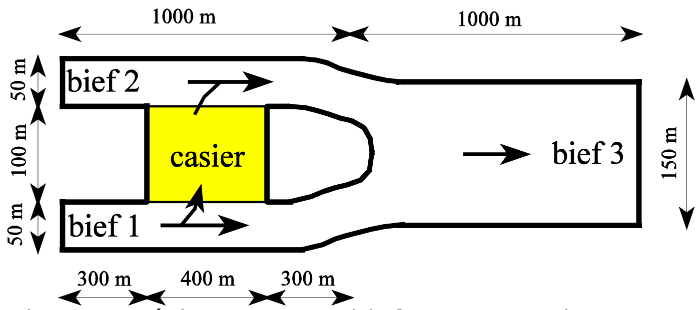


Figure 5 : échange entre biefs par un casier

Ces deux exemples montrent des situations qu'on ne peut pas représenter avec un simple réseau de biefs interconnectés par des nœuds dans lequel la direction du déversement ne pourrait être différente de celle de l'écoulement. De plus on ne pourrait pas obtenir une zone déversante de longueur variable avec la hauteur d'eau.

De façon générale on modélise la situation suivante :

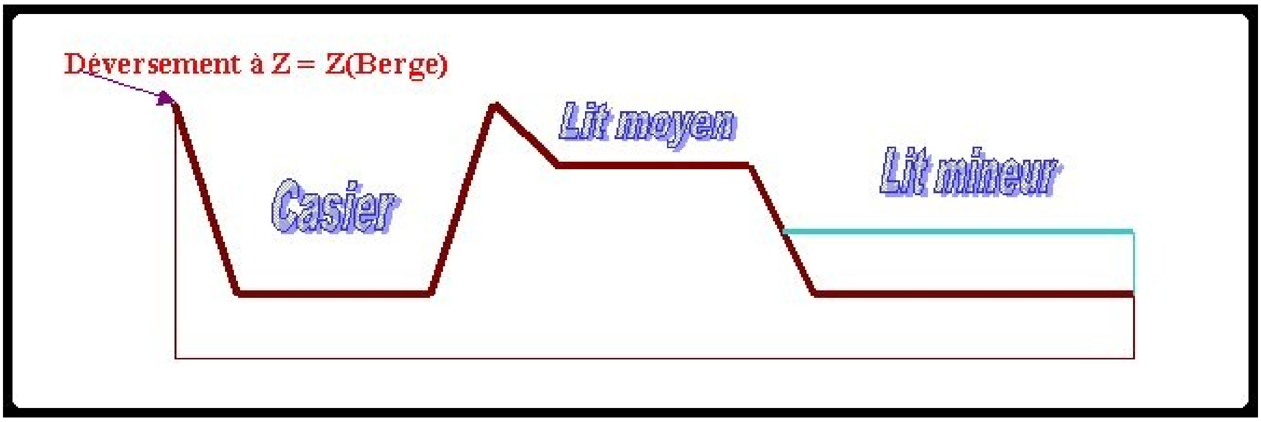


Figure 6 : profil en travers avec casier

Le déversement est modélisé comme un écoulement sur un déversoir rectangulaire, le seule différence étant qu'on ne calcule par un débit en m^3/s mais un débit linéïque en m^2/s. On utilise donc la même loi de fonctionnement que pour le déversoir mais en normalisant par la longueur de déversement ce qui revient à prendre L = 1 dans les formules d'écoulement noyé et dénoyé du déversoir rectangulaire (voir chapitre 9.17.3.1).

Un déversement latéral est défini par l'utilisateur en choisissant :

- Un tronçon de bief déterminé par ses sections amont et aval.
- La cote de déversement à l'amont et à l'aval, les cotes de déversement pour les points intermédiaires étant interpolés linéairement. Cependant les valeurs par défaut des cotes de déversement sont celles de la berge C'est-à-dire le plus bas des deux points externes du profil en travers.
- Une profondeur moyenne d'affaissement de la digue et taux représentant la proportion de digue affaissée le long du tronçon.
- Un coefficient de débit pour la loi de déversoir ; de la même façon que pour un déversoir latéral, il faut choisir un coefficient de débit plus faible que pour un déversoir frontal.
- Une cible ou milieu récepteur pour le déversement ; il y a trois possibilités :
  - le déversement vers un autre tronçon de même longueur ;
  - le déversement vers un casier de stockage ;
  - le déversement vers l'extérieur du réseau.

En chaque point du tronçon déversant MAGE compare la cote de l'eau dans la section déversante à la cote de l'eau du point récepteur (section du tronçon récepteur ou cote de l'eau dans le casier récepteur) ; si la première est supérieure à la deuxième il y a déversement sinon C'est la zone réceptrice qui alimente le secteur déversant. Dans les deux cas MAGE calcule deux débits (linéïques) de déversement en utilisant la formule du déversoir normalisée par la longueur déversante, un pour la cote de déversement et un pour la cote de déversement moins la profondeur d'affaissement. Le débit linéïque total est une pondération des deux utilisant le taux d'affaissement. Il est positif s'il y a déversement et négatif s'il y a alimentation. Faire le calcul de débit section par section permet de déterminer aisément, à l'intérieur du tronçon, le ou les secteurs effectivement déversant.

En cas de déversement vers l'extérieur du réseau on ne dispose pas d'information sur le niveau d'eau dans la zone réceptrice ; on calcule donc un débit dénoyé et bien entendu ce ne peut pas être un débit d'alimentation (débit négatif).

Dans le cas d'un déversement vers un casier, il est important de ne pas oublier l'hypothèse de base du fonctionnement d'un casier à savoir que le plan d'eau est toujours horizontal. Si l'on n'y prend pas garde on peut ainsi obtenir un comportement aberrant consistant par exemple à remplir un casier par un déversement de l'amont du tronçon et à le vidanger par une alimentation de l'aval du tronçon. Pour cela il suffit que la cote de l'eau dans le casier soit comprise entre les niveaux d'eau amont et aval du tronçon. Le résultat final est au mieux une instabilité numérique ou bien un court-circuit du tronçon par le casier traduisant un transfert instantané de volume de l'amont à l'aval du tronçon en passant par le casier. MAGE ne dispose pas pour le moment d'un moyen de diagnostic automatique de ce type de faute de modélisation.

La première version du modèle d'échanges latéraux (MAGE 5) n'autorisait qu'un seul lien latéral entre un tronçon et un casier ou entre deux tronçons. Ceci est assez naturel compte tenu du fait que les équations de St-Venant ne distinguent pas les rives gauche et droite d'une rivière. La version actuelle permet d'associer à chaque tronçon un déversement de rive gauche et un autre de rive droite. On peut ainsi simuler des rivières perchées avec des endiguements de hauteurs différentes (donc des critères de déversements différents) sur les deux rives.

Au final les échanges latéraux s'ajoutent aux autres apports latéraux qui s'écrivent donc :

$$q = q_{apports} - q_{déversements} - \frac{\partial S_{majeur}}{\partial t} \tag{3.27}$$

3.4. Les conditions aux limites

Les équations de Saint-Venant sont des équations aux dérivées partielles hyperboliques non-linéaires. Des considérations classiques utilisant la théorie des caractéristiques pour analyser la propagation de perturbations, permettent de distinguer les conditions aux limites nécessaires en fonction du régime d'écoulement fluvial (subcritique) ou torrentiel (supercritique) [réf biblio].

Dans le cas d'un écoulement subcritique il faut une condition à la limite à l'amont et une autre à l'aval. Cela traduit le fait que l'écoulement est contrôlé à la fois par l'amont et par l'aval. En particulier le niveau aval a une influence sur la ligne d'eau (en hauteur et débit). Les conditions aux limites qui permettent de calculer aisément une ligne d'eau (celles qui marchent bien) sont une condition en débit imposé à l'amont et une condition relation hauteur-débit ou hauteur imposé à l'aval.

Dans le cas d'un écoulement supercritique il faut deux conditions à l'amont et aucune à l'aval. Cela traduit le fait que l'écoulement est entièrement contrôlé par l'amont et qu'aucune influence ne peut remonter de l'aval. En général on impose à la fois un débit et une hauteur d'eau.

MAGE est conçu pour simuler des écoulements subcritiques uniquement et les conditions aux limites possibles sont donc des débits fonction du temps imposé à chaque entrée du réseau (amont) et des hauteurs fonction du temps ou relations hauteur-débit imposées aux points de sortie du réseau (aval). De plus on peut ajouter un apport ponctuel de débit fonction du temps en chaque nœud intérieur (nœud ni amont ni aval) du réseau.

3.4.1. Cas particulier d'ISM

Dans le cas d'ISM, on a 3 débits partiels à injecter comme condition à la limite amont. En pratique ni les observations de terrain ni les modèles hydrologiques (comme les modèles GR par exemple) ne peuvent fournir une telle décomposition du débit total injecté dans le cours d'eau. Il faut donc que le code de calcul se débrouille pour calculer lui-même cette répartition du débit total entre les trois sous-sections.

Mage résout le problème en utilisant la répartition de débit obtenue avec ISM dans la 2^{e} section de calcul du bief qui porte la condition à la limite amont. Comme à chaque pas de temps le calcul est itératif on obtient une convergence vers une répartition satisfaisante.

Bien entendu, dans les cas particuliers où dispose de la répartition du débit total, par exemple des données de laboratoire, on peut fournir cette répartition comme condition à la limite amont.

4. La méthode de résolution

Elle est basée sur une discrétisation par la méthode des différences finies. On peut voir dès maintenant qu'à chaque pas de temps on aura à résoudre un système d'équations discrètes non-linéaires. Un deuxième niveau d'approximation sera alors introduit avec une méthode itérative (de type Newton-Raphson ou Point fixe selon les cas) pour résoudre ces équations.

On exposera en premier lieu la méthode de résolution dans le cas le plus simple d'un bief unique. On pourra ainsi voir fonctionner la discrétisation par le schéma de Preissmann, l'introduction des conditions aux limites amont et aval, la linéarisation des équations pour aboutir à un système linéaire facile à résoudre par une méthode de Gauss (double balayage) et la mise en œuvre de la méthode de Newton-Raphson dégénérée sous la forme d'une simple correction du second membre de ce système linéaire.

Dans un deuxième temps on introduira progressivement les extensions de la méthode aux cas d'un réseau ramifié sans casier puis avec casier, ensuite au cas d'un réseau maillé. On verra ainsi comment on adapte la méthode du double balayage à un système linéaire qui n'est plus globalement tridiagonal mais l'est seulement par blocs. On verra aussi comment on estime a priori la répartition des débits entre les biefs défluents et comment cette estimation tire profit des itérations de Newton-Raphson. Enfin on montrera comment faire quelques économies de temps de calcul dans le cas d'un réseau maillé en tirant parti encore une fois de la méthode itérative.

En dernier lieu on montrera comment prendre en compte les ouvrages en travers dans ce processus de résolution.

4.1. La discrétisation

Les équations de Saint-Venant sont donc discrétisées par la méthode des différences finies avec le schéma de Preissmann [réf. Biblio]. Ce schéma numérique n'est pas récent, mais il a prouvé son efficacité. Outre ses qualités numériques de stabilité (voir Annexe 4 : Stabilité du schéma de Preissmann) le fait que ce soit un schéma numérique centré à deux points (en espace) rend facile l'introduction des conditions aux limites et des ouvrages en travers ainsi que l'adaptation de la méthode du double balayage (méthode de Gauss) à la structure pas blocs du système linéaire issu du cas d'un réseau ramifié ou maillé. En revanche le schéma de Preissmann ne permet pas de résoudre les situations d'écoulements très rapides avec des tronçons en régime torrentiel et des ressauts hydrauliques. Par ailleurs le fait que ce soit un schéma semi-implicite en temps complique la discrétisation et de ce fait n'encourage pas l'introduction de nouveaux modèles ou de variantes (par exemple pour les frottements ou les débordements en lit composé) alors que C'est extrêmement facile avec un schéma explicite.

4.1.1. Le schéma de Preissmann

Le plan (x, t) est discrétisé selon un maillage de pas d'espace Δx et de pas de temps Δt. Les équations sont écrites au point M de coordonnées $(x^*, t^*) = (x_{k+1/2}, t + \theta\,\Delta t)$ (figure 7).

Pour approximer les termes $\phi,\ \dfrac{\partial\phi}{\partial x}\ et\ \dfrac{\partial\phi}{\partial t}$ représentés dans les équations de Saint-Venant, on introduit les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \phi_k &= \phi(x_k, t) \\ \Delta\phi_k &= \phi(x_k, t+\Delta t) - \phi(x_k, t) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Pour des raisons pratiques (simplification des écritures, mise en œuvre informatique et comportement numérique) on écrira les équations discrètes en fonction des variations $\Delta\varphi$ sur un pas de temps Δt et non en fonction des valeurs $\varphi(t+\Delta t)$ à la fin du pas de temps.

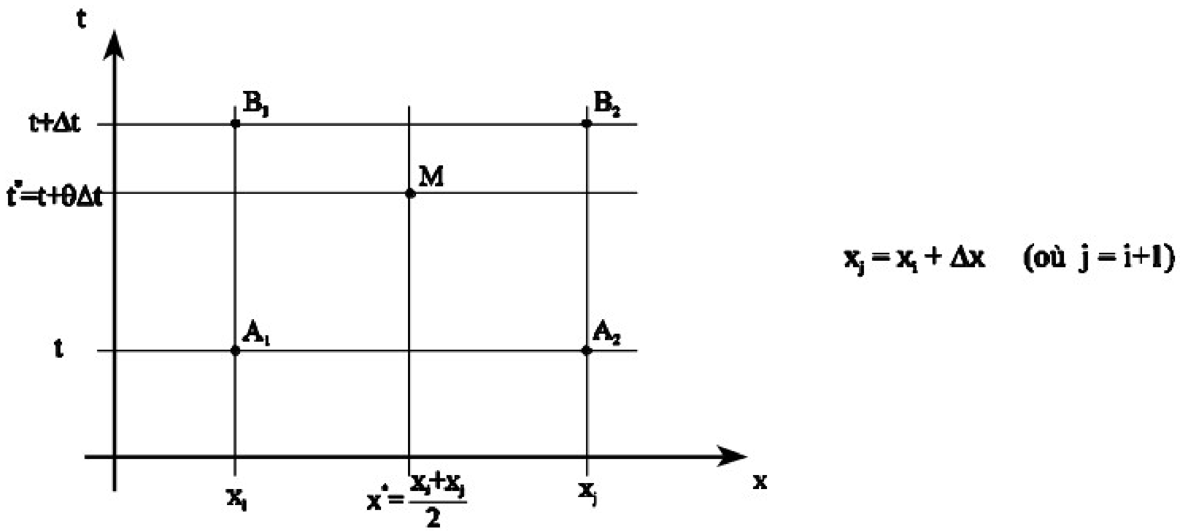


Figure 7 : maillage pour le schéma de Preissmann

4.1.1.1. Approximation d'une fonction

l'approximation d'une fonction φ au point M s'écrit :

$$\phi(M) = (1-\theta)\frac{\phi(A_1)+\phi(A_2)}{2} + \theta\frac{\phi(B_1)+\phi(B_2)}{2}$$

soit : (4.2)

$$\phi(M) = \frac{\phi(A_1)+\phi(A_2)}{2} + \theta\frac{\phi(B_1)-\phi(A_1)+\phi(B_2)-\phi(A_2)}{2}$$

Ce qui donne en utilisant les notations (4.1) :

$$\phi(x_{k+\frac{1}{2}}, t+\theta\Delta t) = \frac{\phi_k+\phi_{k+1}}{2} + \theta\frac{\Delta\phi_k+\Delta\phi_{k+1}}{2} \tag{4.3}$$

4.1.1.2. Approximation d'une dérivée en x

l'approximation de $\frac{\partial\phi}{\partial x}$ au point M est donnée par :

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(M) = (1-\theta)\frac{\phi(A_2)-\phi(A_1)}{\Delta x} + \theta\frac{\phi(B_2)-\phi(B_1)}{\Delta x}$$

soit : (4.4)

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(M) = \frac{\phi(A_2)-\phi(A_1)}{\Delta x} + \theta\frac{\left(\phi(B_2)-\phi(A_2)\right)-\left(\phi(B_1)-\phi(A_1)\right)}{\Delta x}$$

Ce qui donne en utilisant les notations :

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x_{k+\frac{1}{2}}, t+\theta\Delta t) = \frac{\phi_{k+1}-\phi_k}{\Delta x} + \theta\frac{\Delta\phi_{k+1}-\Delta\phi_k}{\Delta x} \tag{4.5}$$

4.1.1.3. Approximation d'une dérivée en temps

l'approximation de $\frac{\partial\phi}{\partial t}$ au point M est donnée par :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}(M) \;=\; \frac{1}{2}\frac{\phi(B_1)-\phi(A_1)}{\Delta t} \;+\; \frac{1}{2}\frac{\phi(B_2)-\phi(A_2)}{\Delta t} \tag{4.6}$$

Ce qui donne en utilisant les notations :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}(x_{k+\frac{1}{2}}, t+\theta\Delta t) \;=\; \frac{\Delta\phi_k \;+\; \Delta\phi_{k+1}}{2\Delta t} \tag{4.7}$$

4.1.2. Discrétisation de l'équation de continuité pour *Debord*

On rappelle que l'équation de continuité s'écrit dans le cas le plus simple :

$$\frac{\partial S}{\partial t} \;+\; \frac{\partial Q}{\partial x} \;=\; q \tag{4.8}$$

On pose :

$$\phi_{i\,k}=\frac{\phi_i+\phi_k}{2} \quad \text{et} \quad \Delta\phi_{i\,k}=\frac{\Delta\phi_i+\Delta\phi_k}{2} \tag{4.9}$$

on obtient pour deux sections consécutives i et i+1 :

$$\frac{\Delta S_i+\Delta S_{i+1}}{2\Delta t} \;+\; \left[\frac{Q_{i+1}-Q_i}{\Delta x}+\theta\frac{\Delta Q_{i+1}-\Delta Q_i}{\Delta x}\right] \;=\; q_{i,i+1}+\theta\Delta q_{i,i+1} \tag{4.10}$$

soit :

$$\Delta S_i+\Delta S_{i+1} \;+\; \frac{2\theta\Delta t}{\Delta x}\left[\Delta Q_{i+1}-\Delta Q_i\right] \;=\; -\frac{2\Delta t}{\Delta x}\left[Q_{i+1}-Q_i\right]+2\Delta t\left[q_{i,i+1}+\theta\Delta q_{i,i+1}\right] \tag{4.11}$$

que l'on exprime encore sous la forme :

$$\left[\Delta Q_i-\Delta Q_{i+1}\right]-\frac{\Delta x}{2\theta\Delta t}\left[\Delta S_i+\Delta S_{i+1}\right] \;=\; -\frac{1}{\theta}\left[Q_i-Q_{i+1}\right]-\frac{\Delta x}{\theta}\left[q_{i,i+1}+\theta\Delta q_{i,i+1}\right] \tag{4.12}$$

4.1.3. Discrétisation de l'équation de continuité pour ISM

Dans le cas où on utilise ISM, l'équation de continuité est (3.14) :

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial(Q_m+Q_l+Q_r)}{\partial x}=q^D=q_m^D+q_l^D+q_r^D \tag{4.13}$$

Ce qui se discrétise de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta S^i+\Delta S^{i+1}}{2\Delta t} \;&+\; \left[\frac{Q_m^{i+1}-Q_m^i}{\Delta x}+\theta\frac{\Delta Q_m^{i+1}-\Delta Q_m^i}{\Delta x}\right] \;+\; \left[\frac{Q_l^{i+1}-Q_l^i}{\Delta x}+\theta\frac{\Delta Q_l^{i+1}-\Delta Q_l^i}{\Delta x}\right] \\ &+\; \left[\frac{Q_r^{i+1}-Q_r^i}{\Delta x}+\theta\frac{\Delta Q_r^{i+1}-\Delta Q_r^i}{\Delta x}\right] \;=\; q_i^D+\theta\Delta q_i^D\end{aligned} \tag{4.14}$$

Ce qui donne, en changeant les signes pour avoir un 1 devant ΔQ_m^i :

$$\begin{aligned}&\Delta Q_m^i+\Delta Q_l^i+\Delta Q_r^i-\Delta Q_m^{i+1}-\Delta Q_l^{i+1}-\Delta Q_r^{i+1}-\frac{\Delta x}{2\theta\Delta t}\left[\Delta S_i+\Delta S^{i+1}\right]\\&=\\&-\frac{1}{\theta}\left[Q_m^i+Q_l^i+Q_r^i-Q_m^{i+1}-Q_l^{i+1}-Q_r^{i+1}\right]-\frac{\Delta x}{\theta}\left[q_i^D+\theta\Delta q_i^D\right]\end{aligned} \tag{4.15}$$

La linéarisation de l'équation discrétisée donne :

$$\begin{aligned}&\left[\Delta Q_m^i+\Delta Q_l^i+\Delta Q_r^i-\Delta Q_m^{i+1}-\Delta Q_l^{i+1}-\Delta Q_r^{i+1}\right]-\frac{\Delta x}{2\theta\Delta t}\left[L_i.\Delta Z_i+L_{i+1}.\Delta Z_{i+1}\right]=\\&\quad-\frac{1}{\theta}\left[Q_m^i+Q_l^i+Q_r^i-Q_m^{i+1}-Q_l^{i+1}-Q_r^{i+1}\right]-\frac{\Delta x}{\theta}\left[q_i^D+\theta\Delta q_i^D\right]\end{aligned} \tag{4.16}$$

où L_i est la largeur totale de l'écoulement (mineur + moyen gauche + moyen droit).

4.1.4. Discrétisation de l'équation dynamique pour *Debord*

En posant w = Q^2/S et V = Q/S, l'équation dynamique s'écrit :

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial x}+gS\frac{\partial Z}{\partial x}=-gS\left(J+J_S\right)+kqV \quad \text{avec} \quad k=\begin{cases}1 \text{ si } q<0\\0 \text{ si } q>0\end{cases} \tag{4.17}$$

En conservant les notations introduites précédemment, l'équation dynamique discrétisée s'écrit :

$$\begin{aligned}&\frac{\Delta Q_i+\Delta Q_{i+1}}{2\Delta t}+\left[\frac{w_{i+1}-w_i}{\Delta x}+\theta\frac{\Delta w_{i+1}-\Delta w_i}{\Delta x}\right]\\&\quad+g\left[\frac{S_{i+1}+S_i}{2}+\theta\frac{\Delta S_{i+1}+\Delta S_i}{2}\right]\cdot\left[\frac{Z_{i+1}-Z_i}{\Delta x}+\theta\frac{\Delta Z_{i+1}-\Delta Z_i}{\Delta x}\right]\\&\quad=-g\left[\frac{S_{i+1}+S_i}{2}+\theta\frac{\Delta S_{i+1}+\Delta S_i}{2}\right]\cdot\left[\frac{J_{i+1}+J_i}{2}+\theta\frac{\Delta J_{i+1}+\Delta J_i}{2}\right]\\&\qquad-g\left[\frac{S_{i+1}+S_i}{2}+\theta\frac{\Delta S_{i+1}+\Delta S_i}{2}\right]\cdot\left[\frac{Js_{i+1}+Js_i}{2}+\theta\frac{\Delta Js_{i+1}+\Delta Js_i}{2}\right]\\&\qquad+k_{i,i+1}(t+\theta\Delta t)\left[q_{i,i+1}+\theta\Delta q_{i,i+1}\right]\cdot\left[\frac{V_{i+1}+V_i}{2}+\theta\frac{\Delta V_{i+1}+\Delta V_i}{2}\right]\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\text{avec } k_{i,i+1}(t+\theta\Delta t)=\begin{cases}1 \text{ si } \left[q_{i,i+1}+\theta\Delta q_{i,i+1}\right]<0\\ \quad 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

En multipliant cette équation par −2Δt et en regroupant dans le membre de gauche les termes pris au temps t+Δt, on obtient, en négligeant les termes d'ordre 2 :

$$
\begin{aligned}
-\left[\Delta Q_i+\Delta Q_{i+1}\right] &+ \frac{2\theta\Delta t}{\Delta x}\left[w_{i+1}-w_i+\theta\frac{\Delta w_{i+1}-\Delta w_i}{\Delta x}\right]\\
&+ g\left[\frac{S_{i+1}+S_i}{2}+\theta\frac{\Delta S_{i+1}+\Delta S_i}{2}\right]\cdot\left[\frac{Z_{i+1}-Z_i}{\Delta x}+\theta\frac{\Delta Z_{i+1}-\Delta Z_i}{\Delta x}\right]\\
&= -g\left[\frac{S_{i+1}+S_i}{2}+\theta\frac{\Delta S_{i+1}+\Delta S_i}{2}\right]\cdot\left[\frac{J_{i+1}+J_i}{2}+\theta\frac{\Delta J_{i+1}+\Delta J_i}{2}\right]\\
&\quad -g\left[\frac{S_{i+1}+S_i}{2}+\theta\frac{\Delta S_{i+1}+\Delta S_i}{2}\right]\cdot\left[\frac{Js_{i+1}+Js_i}{2}+\theta\frac{\Delta Js_{i+1}+\Delta Js_i}{2}\right]\\
&\quad + k_{i,i+1}(t+\theta\Delta t)\left[q_{i,i+1}+\theta\Delta q_{i,i+1}\right]\cdot\left[\frac{V_{i+1}+V_i}{2}+\theta\frac{\Delta V_{i+1}+\Delta V_i}{2}\right]
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

avec $k_{i,i+1}(t+\theta\Delta t)=\begin{cases}1 \text{ si } \left[q_{i,i+1}+\theta\Delta q_{i,i+1}\right]<0\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$

$$
\begin{aligned}
-\left[\Delta Q_i+\Delta Q_{i+1}\right]&+\frac{2\theta\Delta t}{\Delta x}\left[\Delta w_i-\Delta w_{i+1}\right]\\
&+\frac{g\theta\Delta t}{\Delta x}\left[\left(S_i+S_{i+1}\right)\left[\Delta Z_i-\Delta Z_{i+1}\right]+\left(Z_i-Z_{i+1}\right)\left[\Delta S_i+\Delta S_{i+1}\right]\right]\\
&-\frac{g\theta\Delta t}{2}\left(S_i+S_{i+1}\right)\left[\Delta J_i+\Delta J_{i+1}+\Delta Js_i+\Delta Js_{i+1}\right]\\
&-\frac{g\theta\Delta t}{2}\left(J_i+J_{i+1}+Js_i+Js_{i+1}\right)\left[\Delta S_i+\Delta S_{i+1}\right]\\
&+\theta\Delta t\cdot k_{i,i+1}(t+\theta\Delta t)\left(q_{i,i+1}+\theta\Delta q_{i,i+1}\right)\left[\Delta V_i+\Delta V_{i+1}\right]\\
=\ \frac{2\Delta t}{\Delta x}\left(w_{i+1}-w_i\right)&+\frac{g\Delta t}{\Delta x}\left(S_i+S_{i+1}\right)\left(Z_{i+1}-Z_i\right)\\
&+g\Delta t\cdot\left(S_i+S_{i+1}\right)\left(J_i+J_{i+1}+Js_i+Js_{i+1}\right)\\
&-\Delta t\cdot k_{i,i+1}(t+\theta\Delta t)\left(q_{i,i+1}+\theta\Delta q_{i,i+1}\right)\left[V_i+V_{i+1}\right]
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

Cette discrétisation peut être avantageusement remplacée par la variante consistant à ne pas séparer les termes S.(J+Js) comme on l'a fait pour $\beta.Q^2/S$. Ainsi en posant σ = S.(J+Js), l'équation discrète précédente devient :

$$
\begin{aligned}
-\left[\Delta Q_i+\Delta Q_{i+1}\right]&+\frac{2\theta\Delta t}{\Delta x}\left[\Delta w_i-\Delta w_{i+1}\right]\\
&+\frac{g\theta\Delta t}{\Delta x}\left[\left(S_i+S_{i+1}\right)\left[\Delta Z_i-\Delta Z_{i+1}\right]+\left(Z_i-Z_{i+1}\right)\left[\Delta S_i+\Delta S_{i+1}\right]\right]\\
&-\frac{g\theta\Delta t}{2}\left[\Delta\sigma_i+\Delta\sigma_{i+1}\right]\\
&+\theta\Delta t\cdot k_{i,i+1}(t+\theta\Delta t)\left(q_{i,i+1}+\theta\Delta q_{i,i+1}\right)\left[\Delta V_i+\Delta V_{i+1}\right]\\
=\ \frac{2\Delta t}{\Delta x}\left(w_{i+1}-w_i\right)&+\frac{g\Delta t}{\Delta x}\left(S_i+S_{i+1}\right)\left(Z_{i+1}-Z_i\right)+g\Delta t\cdot\left(\sigma_i+\sigma_{i+1}\right)\\
&-\Delta t\cdot k_{i,i+1}(t+\theta\Delta t)\left(q_{i,i+1}+\theta\Delta q_{i,i+1}\right)\left[V_i+V_{i+1}\right]
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

Bien entendu ces équations discrètes sont encore non-linéaires et il faut résoudre le système obtenu en fonction de ΔQ et ΔZ. Cela sera fait au chapitre 4.2 mais auparavant il faut compléter ces équations discrètes par les contributions des modèles complémentaires.

4.1.5. Discrétisation des équations dynamiques pour ISM

4.1.5.1. Équation pour le lit mineur

En posant $w_m = Q_m^2/S_m$ et $V_m = Q_m/S_m$, l'équation dynamique du lit mineur s'écrit :

$$\frac{\partial Q_m}{\partial t} + \frac{\partial w_m}{\partial x} + U_{L,l}\frac{\partial Q_l}{\partial x} + U_{L,r}\frac{\partial Q_r}{\partial x} + gS_m\frac{\partial Z}{\partial x} + \left(U_{L,l}L_l + U_{L,r}L_r\right)\frac{\partial Z}{\partial t} = -gS_m\left(J_m + J_S\right) + k_m q_m^D V_m + \frac{\tau_{ml}h_{ml}}{\rho} + \frac{\tau_{mr}h_{mr}}{\rho} + U_{L,l}q_l^D + U_{L,r}q_r^D \tag{4.22}$$

En appliquant le schéma de Preissmann, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{\Delta Q_m^i + \Delta Q_m^{i+1}}{2\Delta t} + \left[\frac{w_m^{i+1} - w_m^i}{\Delta x} + \theta\frac{\Delta w_m^{i+1} - \Delta w_m^i}{\Delta x}\right] \\
&+ U_{L,l}\left[\frac{Q_l^{i+1} - Q_l^i}{\Delta x} + \theta\frac{\Delta Q_l^{i+1} - \Delta Q_l^i}{\Delta x}\right] + U_{L,r}\left[\frac{Q_r^{i+1} - Q_r^i}{\Delta x} + \theta\frac{\Delta Q_r^{i+1} - \Delta Q_r^i}{\Delta x}\right] \\
&+ g\left[\frac{S_m^{i+1} + S_m^i}{2} + \theta\frac{\Delta S_m^{i+1} + \Delta S_m^i}{2}\right]\cdot\left[\frac{Z^{i+1} - Z^i}{\Delta x} + \theta\frac{\Delta Z^{i+1} - \Delta Z^i}{\Delta x}\right] \\
&+ \left[U_{L,l}L_l + U_{L,r}L_r\right]\left[\frac{\Delta Z^i + \Delta Z^{i+1}}{2\Delta t}\right] \\
&= \\
&- g\left[\frac{S_m^{i+1} + S_m^i}{2} + \theta\frac{\Delta S_m^{i+1} + \Delta S_m^i}{2}\right]\cdot\left[\frac{J_m^{i+1} + J_m^i}{2} + \theta\frac{\Delta J_m^{i+1} + \Delta J_m^i}{2}\right] \\
&- g\left[\frac{S_m^{i+1} + S_m^i}{2} + \theta\frac{\Delta S_m^{i+1} + \Delta S_m^i}{2}\right]\cdot\left[\frac{Js_{i+1} + Js_i}{2} + \theta\frac{\Delta Js_{i+1} + \Delta Js_i}{2}\right] \\
&+ k_m^i q_m^{D,i}\cdot\left[\frac{V_m^{i+1} + V_m^i}{2} + \theta\frac{\Delta V_m^{i+1} + \Delta V_m^i}{2}\right] \\
&+ \left[\frac{F_m^{i+1} + F_m^i}{2} + \theta\frac{\Delta F_m^{i+1} + \Delta F_m^i}{2}\right] + U_{L,l}q_l^D + U_{L,r}q_r^D
\end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\text{avec } k_m^i = \begin{cases} 1 \text{ si } q_m^{D,i} < 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et } F_m = \frac{\tau_{ml}h_{ml}}{\rho} + \frac{\tau_{mr}h_{mr}}{\rho}$$

En multipliant cette équation par 2Δt :

$$\begin{aligned}
&\left[\Delta Q_m^i+\Delta Q_m^{i+1}\right]+\frac{2\Delta t}{\Delta x}\left(w_m^{i+1}-w_m^i\right)+\frac{2\theta\Delta t}{\Delta x}\left(\Delta w_m^{i+1}-\Delta w_m^i\right)\\
&-\frac{2\Delta t}{\Delta x}U_{L,l}\left[Q_l^{i+1}-Q_l^i+\theta\left(\Delta Q_l^{i+1}-\Delta Q_l^i\right)\right]-\frac{2\Delta t}{\Delta x}U_{L,r}\left[Q_r^{i+1}-Q_r^i+\theta\left(\Delta Q_r^{i+1}-\Delta Q_r^i\right)\right]\\
&+\frac{g\Delta t}{\Delta x}\left[\left(S_m^{i+1}+S_m^i\right)+\theta\left(\Delta S_m^{i+1}+\Delta S_m^i\right)\right]\cdot\left[\left(Z^{i+1}-Z^i\right)+\theta\left(\Delta Z^{i+1}-\Delta Z^i\right)\right]\\
&+\left[U_{L,l}L_l+U_{L,r}L_r\right]\left[\Delta Z^i+\Delta Z^{i+1}\right]\\
&=\\
&\quad-\frac{g\Delta t}{2}\left[\left(S_m^{i+1}+S_m^i\right)+\theta\left(\Delta S_m^{i+1}+\Delta S_m^i\right)\right]\cdot\left[\left(J_m^{i+1}+J_m^i\right)+\theta\left(\Delta J_m^{i+1}+\Delta J_m^i\right)\right]\\
&\quad-\frac{g\Delta t}{2}\left[\left(S_m^{i+1}+S_m^i\right)+\theta\left(\Delta S_m^{i+1}+\Delta S_m^i\right)\right]\cdot\left[\left(Js^{i+1}+Js^i\right)+\theta\left(\Delta Js^{i+1}+\Delta Js^i\right)\right]\\
&\quad+k_m^i\Delta t\,q_m^{D,i}\cdot\left[\left(V_m^{i+1}+V_m^i\right)+\theta\left(\Delta V_m^{i+1}+\Delta V_m^i\right)\right]\\
&\quad+\Delta t\left[\left(F_m^{i+1}+F_m^i\right)+\theta\left(\Delta F_m^{i+1}+\Delta F_m^i\right)\right]+2\Delta t\,U_{L,l}q_l^D+2\Delta t\,U_{L,r}q_r^D
\end{aligned}\tag{4.24}$$

Puis en regroupant dans le membre de gauche les termes pris au temps t+Δt, on obtient, en négligeant les termes d'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
&\left[\Delta Q_m^i+\Delta Q_m^{i+1}\right]+\frac{2\theta\Delta t}{\Delta x}\left[\Delta w_m^{i+1}-\Delta w_m^i\right]\\
&+\frac{g\theta\Delta t}{\Delta x}\left[\left(S_m^{i+1}+S_m^i\right)\cdot\left(\Delta Z^{i+1}-\Delta Z^i\right)+\left(Z^{i+1}-Z^i\right).\left(\Delta S_m^{i+1}+\Delta S_m^i\right)\right]\\
&+\frac{g\theta\Delta t}{2}\left[\left(S_m^{i+1}+S_m^i\right).\left(\Delta J_m^{i+1}+\Delta J_m^i\right)+\left(J_m^{i+1}+J_m^i\right).\left(\Delta S_m^{i+1}+\Delta S_m^i\right)\right]\\
&+\frac{g\theta\Delta t}{2}\left[\left(S_m^{i+1}+S_m^i\right).\left(\Delta Js^{i+1}+\Delta Js^i\right)+\left(Js^{i+1}+Js^i\right).\left(\Delta S_m^{i+1}+\Delta S_m^i\right)\right]\\
&+\left[U_{L,l}L_l+U_{L,r}L_r\right]\left[\Delta Z^i+\Delta Z^{i+1}\right]\\
&+\frac{2\theta\Delta t}{\Delta x}\left[U_{L,l}\left(\Delta Q_l^{i+1}-\Delta Q_l^i\right)+U_{L,r}\left(\Delta Q_r^{i+1}-\Delta Q_r^i\right)\right]\\
&-k_m^i\theta\Delta t\,q_m^{D,i}\cdot\left(\Delta V_m^{i+1}+\Delta V_m^i\right)+\theta\Delta t\left(\Delta F_m^i+\Delta F_m^{i+1}\right)\\
&=\\
&\quad-\frac{2\Delta t}{\Delta x}\left(w_m^{i+1}-w_m^i\right)-\frac{g\Delta t}{\Delta x}\left(S_m^{i+1}+S_m^i\right)\cdot\left(Z^{i+1}-Z^i\right)\\
&\quad-\frac{g\Delta t}{2}\left(S_m^{i+1}+S_m^i\right)\cdot\left(J_m^{i+1}+J_m^i+Js^{i+1}+Js^i\right)\\
&\quad+k_m^i\Delta t\,q_m^{D,i}\cdot\left(V_m^{i+1}+V_m^i\right)+\Delta t\left(F_m^{i+1}+F_m^i\right)\\
&\quad+2\Delta t\,U_{L,l}q_l^D-\frac{2\Delta t}{\Delta x}U_{L,l}\left[Q_l^{i+1}-Q_l^i\right]+2\Delta t\,U_{L,r}q_r^D-\frac{2\Delta t}{\Delta x}U_{L,r}\left[Q_r^{i+1}-Q_r^i\right]
\end{aligned}\tag{4.25}$$

$q_m^{D,i}$ est le débit reçu ou perdu par le lit mineur entre les sections i et i+1. Il est évalué au temps $t+\theta\Delta t$. La linéarisation de cette équation s'appuie sur les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
&V=\frac{Q}{S}\Rightarrow\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{1}{S^2}\left(S.\frac{\partial Q}{\partial t}-Q.\frac{\partial S}{\partial t}\right)=\frac{1}{S^2}\left(S.\frac{\partial Q}{\partial t}-Q.L.\frac{\partial Z}{\partial t}\right)\\
&\Rightarrow\frac{\Delta V}{\Delta t}=\frac{1}{S^2}\left(S.\frac{\Delta Q}{\Delta t}-Q.L.\frac{\Delta Z}{\Delta t}\right)\Rightarrow\Delta V=\frac{1}{S^2}\left(S.\Delta Q-Q.L.\Delta Z\right)=\frac{1}{S}.\Delta Q-\frac{V.L}{S}\Delta Z
\end{aligned}\tag{4.26}$$

$$\begin{aligned} w=\frac{Q^2}{S} \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial t}=\frac{1}{S^2}\left(2Q\frac{\partial Q}{\partial t}S-Q^2L\frac{\partial Z}{\partial t}\right) \\ \Delta w=\frac{1}{S^2}\left(2QS\Delta Q-Q^2L\Delta Z\right)=2V\Delta Q-V^2L\Delta Z \end{aligned} \tag{4.27}$$

$$J=\frac{Q|Q|}{De^2} \quad \text{avec} \quad De=K.S.R_H^{\frac{2}{3}} \;\; ; \;\; R_H=\frac{S}{P} \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned} \frac{dDe}{dZ}=K\left[LR_H^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}SR_H^{-\frac{1}{3}}\frac{dR_H}{dZ}\right] \quad \text{or} \quad \frac{dR_H}{dZ}=\frac{1}{P^2}\left[P.L-S\frac{dP}{dZ}\right] \\ \frac{dDe}{dZ}=K\left[LR_H^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}SR_H^{-\frac{1}{3}}\frac{1}{P^2}\left[P.L-S\frac{dP}{dZ}\right]\right] \\ \frac{dDe}{dZ}=K.R_H^{\frac{2}{3}}.\left[\frac{5}{3}L-\frac{2}{3}R_H\frac{dP}{dZ}\right]=De.\left[\frac{5}{3}\frac{L}{S}-\frac{2}{3}\frac{1}{P}\frac{dP}{dZ}\right] \end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned} Si\,Q>0 \Rightarrow \frac{\partial J}{\partial t}=\frac{1}{De^4}\left[2Q\frac{\partial Q}{\partial t}De^2-Q^2De\frac{dDe}{dZ}\frac{\partial Z}{\partial t}\right] \\ \frac{\partial J}{\partial t}=\frac{2Q}{De^2}\frac{\partial Q}{\partial t}-\frac{Q^2}{De^3}\frac{dDe}{dZ}\frac{\partial Z}{\partial t} \\ \Delta J=\frac{2Q}{De^2}\Delta Q-\frac{Q^2}{De^2}.\left[\frac{5}{3}\frac{L}{S}-\frac{2}{3}\frac{1}{P}\frac{dP}{dZ}\right]\Delta Z=\frac{2J}{Q}\Delta Q-J.\left[\frac{5}{3}\frac{L}{S}-\frac{2}{3}\frac{1}{P}\frac{dP}{dZ}\right]\Delta Z \end{aligned} \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned} F_m=\frac{\rho\psi^t\left(V_m-V_l\right)^2h_{ml}}{\rho}+\frac{\rho\psi^t\left(V_m-V_r\right)^2h_{mr}}{\rho} \\ F_m=\psi^t\left(V_m-V_l\right)^2h_{ml}+\psi^t\left(V_m-V_r\right)^2h_{mr}=F_{ml}+F_{mr} \\ h_{ml}=max\left(Z-Z_l^{deb},0\right) \qquad h_{mr}=max\left(Z-Z_r^{deb},0\right) \\ \Delta F_{ml}=\begin{cases} 2\left(V_m-V_l\right)h_{ml}\left(\Delta V_m-\Delta V_l\right)+\left(V_m-V_l\right)^2\Delta Z \\ 0 \;\; \text{si} \;\; Z<Z_l^{deb} \end{cases} \\ \Delta V_m=\frac{1}{S_m}.\Delta Q_m-\frac{V_m.L_m}{S_m}\Delta Z \\ \Delta V_l=\frac{1}{S_l}.\Delta Q_l-\frac{V_l.L_l}{S_l}\Delta Z \\ \Delta F_{ml}=\begin{cases} \dfrac{\left(2\left(V_m-V_l\right)h_{ml}\right)}{S_m}.\Delta Q_m-\dfrac{\left(2\left(V_m-V_l\right)h_{ml}\right)}{S_l}.\Delta Q_l \\ +\left[2\left(V_m-V_l\right)h_{ml}\left(\dfrac{V_l.L_l}{S_l}-\dfrac{V_m.L_m}{S_m}\right)+\left(V_m-V_l\right)^2\right]\Delta Z \\ 0 \;\; \text{si} \;\; Z<Z_l^{deb} \end{cases} \end{aligned} \tag{4.31}$$

Le terme de force de traînée se discrétise comme le terme de perte de charge linéaire en prenant $De=S$ et donc $\frac{d\,De}{dZ}=L$ et finalement en remplaçant $\frac{5}{3}\frac{L}{S}-\frac{2}{3}\frac{1}{P}\frac{dP}{dZ}$ par $\frac{L}{S}$.

4.1.5.2. Équation pour le lit moyen gauche

En posant $w_l = Q_l^2/S_l$ et $V_l = Q_l/S_l$, l'équation dynamique du lit moyen gauche s'écrit :

$$\begin{aligned}&\frac{\partial Q_l}{\partial t}+\frac{\partial w_l}{\partial x}+gS_l\frac{\partial Z}{\partial x}-U_{L,l}\cdot L_l\frac{\partial Z}{\partial t}-U_{L,l}\frac{\partial Q_l}{\partial x}\\&=-gS_lJ_l+k_lq_l^DV_l+\frac{\tau_{lm}h_{lm}}{\rho}-U_{L,l}q_l^D\end{aligned}\tag{4.32}$$

Elle se discrétise de la même façon que l'équation dynamique pour le lit mineur en appliquant le schéma de Preissmann.

4.1.6. Le système de Saint-Venant discrétisé

4.1.6.1. pour *Debord*

Le système constitué des équations (4.12) et (4.21) est un système discret non-linéaire des variables ΔQ_i et ΔZ_i. Pour un bief de N sections de calculs on a N-1 couples (i, i+1) et donc 2N-2 équations auxquelles il faut ajouter les deux équations des conditions aux limites amont et aval de l'écoulement fluvial ce qui nous donne les 2N équations nécessaires.

4.1.6.2. Pour ISM

Le système constitué des équations (4.16) (4.25) et (4.32) est un système discret non-linéaire des variables $\Delta Q_l^i, \Delta Q_m^i, \Delta Q_r^i$ et ΔZ^i. Pour un bief de N sections de calculs on a N-1 couples (i, i+1) et donc 4N-4 équations auxquelles il faut ajouter 3 équations pour la condition à la limite amont (une par débit partiel) et 1 équation pour la condition à la limite aval en écoulement fluvial ce qui nous donne les 4N équations nécessaires.

4.2. Résolution des équations discrètes dans le cas d'un bief unique

La méthode de résolution est présentée dans un premier temps pour un bief unique sans ouvrage hydraulique. Nous expliquons ensuite comment adapter cette méthode au cas d'un réseau ramifié, puis nous la généraliserons au cas d'un réseau maillé. Enfin nous exposerons les modifications à apporter pour prendre en compte les ouvrages hydrauliques éventuels.

La première étape consiste à faire le maillage du domaine d'étude. Nous supposerons donc le bief décomposé en N sections de calcul.

4.2.1. Cas de l'utilisation de la méthode *Debord* ou d'un seul lit

L'écriture de la discrétisation sur l'ensemble du bief, à un instant précis, conduit à un système de 2N-2 équations (N-1 équations de continuité discrétisées et N-1 équations dynamiques discrétisées) à 2N inconnues que sont ΔQ_i et ΔZ_i pour i=1, … , N, c'est-à-dire les variations de débit et de niveau en chaque point de calcul au cours du pas de temps considéré, ce qui suppose bien entendu de connaître les débits et niveaux au début du pas de temps (voir chapitre 4.1).

Si on choisit de représenter par EC(ΔQ_i, ΔZ_i, ΔQ_{i+1}, ΔZ_{i+1}) (resp. par ED(ΔQ_i, ΔZ_i, ΔQ_{i+1}, ΔZ_{i+1})) l'équation de continuité (resp. l'équation dynamique) discrétisée entre les sections de calcul consécutives i et i+1, le système obtenu peut être schématisé par :

$$2N-2 \text{ équations} \begin{cases} EC(\Delta Q_1, \Delta Z_1, \Delta Q_2, \Delta Z_2) \\ ED(\Delta Q_1, \Delta Z_1, \Delta Q_2, \Delta Z_2) \\ \dots \\ EC(\Delta Q_i, \Delta Z_i, \Delta Q_{i+1}, \Delta Z_{i+1}) \\ ED(\Delta Q_i, \Delta Z_i, \Delta Q_{i+1}, \Delta Z_{i+1}) \\ \dots \\ EC(\Delta Q_{N-1}, \Delta Z_{N-1}, \Delta Q_N, \Delta Z_N) \\ ED(\Delta Q_{N-1}, \Delta Z_{N-1}, \Delta Q_N, \Delta Z_N) \end{cases} \tag{4.33}$$

Il manque donc 2 équations à ce système pour qu'il puisse être résolu, on lui ajoute donc les conditions aux limites amont et aval qui seront préalablement discrétisées.

L'écriture de la discrétisation sur l'ensemble du bief, à un instant donné, conduit à un système de 2N-2 équations (N-1 équations de continuité discrétisées et N-1 équations dynamiques discrétisées) à 2N inconnues que sont ΔQ_i et ΔZ_i pour i = 1…N, c'est-à-dire les variations de débit et de niveau en chaque point de calcul au cours du pas de temps considéré, ce qui suppose bien entendu de connaître les débits et niveaux au début du pas de temps (voir chapitre 4.1).

Si on choisit de représenter par $EC(\Delta Q_i, \Delta Z_i, \Delta Q_{i+1}, \Delta Z_{i+1})$ (resp. par $ED(\Delta Q_i, \Delta Z_i, \Delta Q_{i+1}, \Delta Z_{i+1})$) l'équation de continuité (resp. l'équation dynamique) discrétisée entre les sections de calcul consécutives i et i+1, le système obtenu peut être schématisé par :

$$2N-2 \text{ équations} \begin{cases} EC(\Delta Q_1, \Delta Z_1, \Delta Q_2, \Delta Z_2) \\ ED(\Delta Q_1, \Delta Z_1, \Delta Q_2, \Delta Z_2) \\ \dots \\ EC(\Delta Q_i, \Delta Z_i, \Delta Q_{i+1}, \Delta Z_{i+1}) \\ ED(\Delta Q_i, \Delta Z_i, \Delta Q_{i+1}, \Delta Z_{i+1}) \\ \dots \\ EC(\Delta Q_{N-1}, \Delta Z_{N-1}, \Delta Q_N, \Delta Z_N) \\ ED(\Delta Q_{N-1}, \Delta Z_{N-1}, \Delta Q_N, \Delta Z_N) \end{cases} \tag{4.34}$$

Il manque donc 2 équations à ce système pour qu'il puisse être résolu, on lui ajoute donc les conditions aux limites amont et aval qui seront préalablement discrétisées.

4.2.2. Cas de l'utilisation de la méthode ISM

L'écriture de la discrétisation sur l'ensemble du bief, à un instant donné, conduit à un système de 4N-4 équations (N-1 équations de continuité discrétisées et 3N-3 équations dynamiques discrétisées) à 4N inconnues que sont ΔQm_i, ΔQl_i, ΔQr_i et ΔZ_i pour i = 1…N, c'est-à-dire les variations de débit dans les sous-sections et de niveau en chaque point de calcul au cours du pas de temps considéré, ce qui suppose bien entendu de connaître les débits et niveaux au début du pas de temps (voir chapitre 4.1).

Si on choisit de représenter par $EC(\Delta Qm_i , \Delta Ql_i , \Delta Qr_i , \Delta Z_i , \Delta Qm_{i+1} , \Delta Ql_{i+1} , \Delta Qr_{i+1} , \Delta Z_{i+1})$ l'équation de continuité discrétisée et par EM(), EL() et ED() les équations de quantité de mouvement (même liste de paramètres) entre les sections de calcul consécutives i et i+1, le système obtenu peut être schématisé par :

$$
4N-4 \text{ équations} \left\{ \begin{array}{l}
EC(\Delta Qm_1, \Delta Ql_1, \Delta Qr_1, \Delta Z_1, \Delta Qm_2, \Delta Ql_2, \Delta Qr_2, \Delta Z_2) \\
EM(\Delta Qm_1, \Delta Ql_1, \Delta Qr_1, \Delta Z_1, \Delta Qm_2, \Delta Ql_2, \Delta Qr_2, \Delta Z_2) \\
EL(\Delta Qm_1, \Delta Ql_1, \Delta Qr_1, \Delta Z_1, \Delta Qm_2, \Delta Ql_2, \Delta Qr_2, \Delta Z_2) \\
ER(\Delta Qm_1, \Delta Ql_1, \Delta Qr_1, \Delta Z_1, \Delta Qm_2, \Delta Ql_2, \Delta Qr_2, \Delta Z_2) \\
\qquad \cdots \\
EC(\Delta Qm_i, \Delta Ql_i, \Delta Qr_i, \Delta Z_i, \Delta Qm_{i+1}, \Delta Ql_{i+1}, \Delta Qr_{i+1}, \Delta Z_{i+1}) \\
EM(\Delta Qm_i, \Delta Ql_i, \Delta Qr_i, \Delta Z_i, \Delta Qm_{i+1}, \Delta Ql_{i+1}, \Delta Qr_{i+1}, \Delta Z_{i+1}) \\
EL(\Delta Qm_i, \Delta Ql_i, \Delta Qr_i, \Delta Z_i, \Delta Qm_{i+1}, \Delta Ql_{i+1}, \Delta Qr_{i+1}, \Delta Z_{i+1}) \\
ER(\Delta Qm_i, \Delta Ql_i, \Delta Qr_i, \Delta Z_i, \Delta Qm_{i+1}, \Delta Ql_{i+1}, \Delta Qr_{i+1}, \Delta Z_{i+1}) \\
\qquad \cdots \\
EC(\Delta Qm_{N-1}, \Delta Ql_{N-1}, \Delta Qr_{N-1}, \Delta Z_{N-1}, \Delta Qm_N, \Delta Ql_N, \Delta Qr_N, \Delta Z_N) \\
EM(\Delta Qm_{N-1}, \Delta Ql_{N-1}, \Delta Qr_{N-1}, \Delta Z_{N-1}, \Delta Qm_N, \Delta Ql_N, \Delta Qr_N, \Delta Z_N) \\
EL(\Delta Qm_{N-1}, \Delta Ql_{N-1}, \Delta Qr_{N-1}, \Delta Z_{N-1}, \Delta Qm_N, \Delta Ql_N, \Delta Qr_N, \Delta Z_N) \\
ER(\Delta Qm_{N-1}, \Delta Ql_{N-1}, \Delta Qr_{N-1}, \Delta Z_{N-1}, \Delta Qm_N, \Delta Ql_N, \Delta Qr_N, \Delta Z_N)
\end{array} \right. \tag{4.35}
$$

Il manque donc 4 équations à ce système pour qu'il puisse être résolu, on lui ajoute donc les conditions aux limites amont et aval qui seront préalablement discrétisées.

4.2.3. Les conditions aux limites discrétisées

4.2.3.1. Condition à la limite amont avec méthode *Debord*

La condition à la limite amont est représentée par un hydrogramme (loi Q(t) d'évolution temporelle du débit à l'entrée du système) pouvant restituer une crue ou une décrue.

La condition à la limite amont nous donne la valeur de $Q(x_1, t)$ à chaque instant. La discrétisation de cette condition s'écrit donc :

$$\Delta Q_1 = Q(x_1, t+\Delta t) - Q(x_1, t) \tag{4.36}$$

4.2.3.2. Condition à la limite amont avec la méthode ISM

Il nous faut cette fois une relation temporelle pour chacune des composantes Qm, Ql et Qr du débit total.

La condition à la limite amont s'exprime donc par 3 équations et la discrétisation de cette condition s'écrit donc :

$$
\begin{array}{ll}
\Delta Qm_1 & = Qm(x_1, t+\Delta t) - Qm(x_1, t) \\
\Delta Ql_1 & = Ql(x_1, t+\Delta t) - Ql(x_1, t) \\
\Delta Qr_1 & = Qr(x_1, t+\Delta t) - Qr(x_1, t)
\end{array} \tag{4.37}
$$

De façon équivalente on pourrait choisir d'utiliser un hydrogramme pour le débit total plus 2 relations donnant la part du débit total passant respectivement dans chacune des plaines d'inondation à l'amont du bief. Cette approche n'apporte aucune simplification puisqu'il faut pouvoir définir une répartition des débits entre les 3 lits qui soit variable au cours du temps. En effet rien ne permet de supposer que la répartition du débit est constante au cours d'une crue. En fin de compte il est plus simple de fournir directement chacun des 3 hydrogrammes partiels.

4.2.3.3. Condition à la limite aval

La condition à la limite aval peut être représentée soit par un limnigramme (loi Z(t) d'évolution temporelle du niveau) simulant par exemple le phénomène de marée, soit par une loi de tarage (loi Q(Z) reliant le débit total et la hauteur d'eau, caractéristique d'une section particulière).

La condition à la limite aval sous forme de limnigramme nous donne la valeur de $Z(x_N, t)$ à chaque instant. Sa discrétisation est alors :

$$\Delta Z_N = Z(x_N, t+\Delta t) - Z(x_N, t) \tag{4.38}$$

La condition à la limite aval sous forme de loi de tarage donne une relation entre Q et Z.
On a $Q(x_N, t) = Q(Z_N(t))$. Dans le cas de la méthode *Debord*, cette condition non linéaire est discrétisée par :

$$\Delta Q_N = Q(x_N, t+\Delta t) - Q(x_N, t) \tag{4.39}$$

soit :

$$\Delta Q_N = Q(Z_N(t+\Delta t)) - Q(Z_N(t)) \tag{4.40}$$

soit enfin :

$$\Delta Q_N = Q(Z_N + \Delta Z_N) - Q(Z_N) \tag{4.41}$$

Dans le cas de la méthode ISM, la condition à la limite aval sous forme de loi de tarage s'écrit :

$$\Delta Qm_N + \Delta Ql_N + \Delta Qr_N = Q(x_N, t+\Delta t) - Q(x_N, t) \tag{4.42}$$

soit :

$$\Delta Qm_N + \Delta Ql_N + \Delta Qr_N = Q(Z_N(t+\Delta t)) - Q(Z_N(t)) \tag{4.43}$$

soit enfin :

$$\Delta Qm_N + \Delta Ql_N + \Delta Qr_N = Q(Z_N + \Delta Z_N) - Q(Z_N) \tag{4.44}$$

4.2.4. Itérations et double balayage dans le cas de la méthode *Debord*

Complété par les conditions aux limites amont et aval, le système discret, dans le cas de la méthode *Debord*, devient :

$$2N \text{ équations} \begin{cases} CLM(\Delta Q_1, \Delta Z_1) \\ EC(\Delta Q_1, \Delta Z_1, \Delta Q_2, \Delta Z_2) \\ ED(\Delta Q_1, \Delta Z_1, \Delta Q_2, \Delta Z_2) \\ \cdots \\ EC(\Delta Q_i, \Delta Z_i, \Delta Q_{i+1}, \Delta Z_{i+1}) \\ ED(\Delta Q_i, \Delta Z_i, \Delta Q_{i+1}, \Delta Z_{i+1}) \\ \cdots \\ EC(\Delta Q_{N-1}, \Delta Z_{N-1}, \Delta Q_N, \Delta Z_N) \\ ED(\Delta Q_{N-1}, \Delta Z_{N-1}, \Delta Q_N, \Delta Z_N) \\ CLV(\Delta Q_N, \Delta Z_N) \end{cases} \tag{4.45}$$

Le système est ainsi fermé. On peut alors l'écrire de façon synthétique :

$$F(X) = B \tag{4.46}$$

où X est le vecteur des inconnues $(\Delta Q_1, \Delta Z_1, \cdots, \Delta Q_i, \Delta Z_i, \cdots, \Delta Q_N, \Delta Z_N)$ et B est le second membre constitué des termes connus.

Comme on l'a déjà dit ce système est non linéaire en ΔQ_i, et ΔZ_i, il faut donc faire appel à une méthode de résolution itérative. La méthode la plus couramment utilisée est la méthode de Newton-Raphson ou l'une de ses variantes ; c'est aussi celle dont la convergence est, en général, la plus rapide. En revanche elle est assez coûteuse puisqu'elle suppose la résolution d'un système linéaire à chaque itération contrairement à la méthode du point fixe qui ne demande que l'évaluation de la valeur de la fonction dont on cherche une racine.

4.2.4.1. Rappel sur la méthode de Newton-Raphson

La méthode de Newton-Raphson est utilisée pour résoudre des équations du type G(X) = 0. Le principe est le suivant : partant d'une valeur initiale bien choisie X^0, on calcule ΔX tel que $X^1 = X^0 + \Delta X$ soit solution. On a donc $G(X^1) = G(X^0 + \Delta X)$.

En écrivant un développement de Taylor au premier ordre de $G(X^1)$ on obtient :

$$G(X^1) \approx G(X^0) + \Delta X \cdot DG(X^0) \tag{4.47}$$

Comme X^1 est solution alors $G(X^1) = 0$ et on trouve finalement :

$$X^1 = X^0 - \left[DG(X^0)\right]^{-1} \cdot G(X^0) \tag{4.48}$$

Seulement X^1 n'est pas exactement solution du fait du développement de Taylor. On réitère donc ce procédé en remplaçant X^0 par X^1. On est donc amené à calculer successivement :

$$X^{k+1} = X^k - \left[DG(X^k)\right]^{-1} \cdot G(X^k) \tag{4.49}$$

jusqu'à ce que l'écart entre deux itérées successives soit inférieur à un seuil fixé.

Cette méthode consiste en fait à approcher la fonction G par sa tangente au point initial $(X^0, G(X^0))$, à chercher l'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses ce qui donne le point X^1, puis à recommencer à partir du point $(X^1, G(X^1))$, comme il est illustré sur la figure suivante pour la dimension 1.

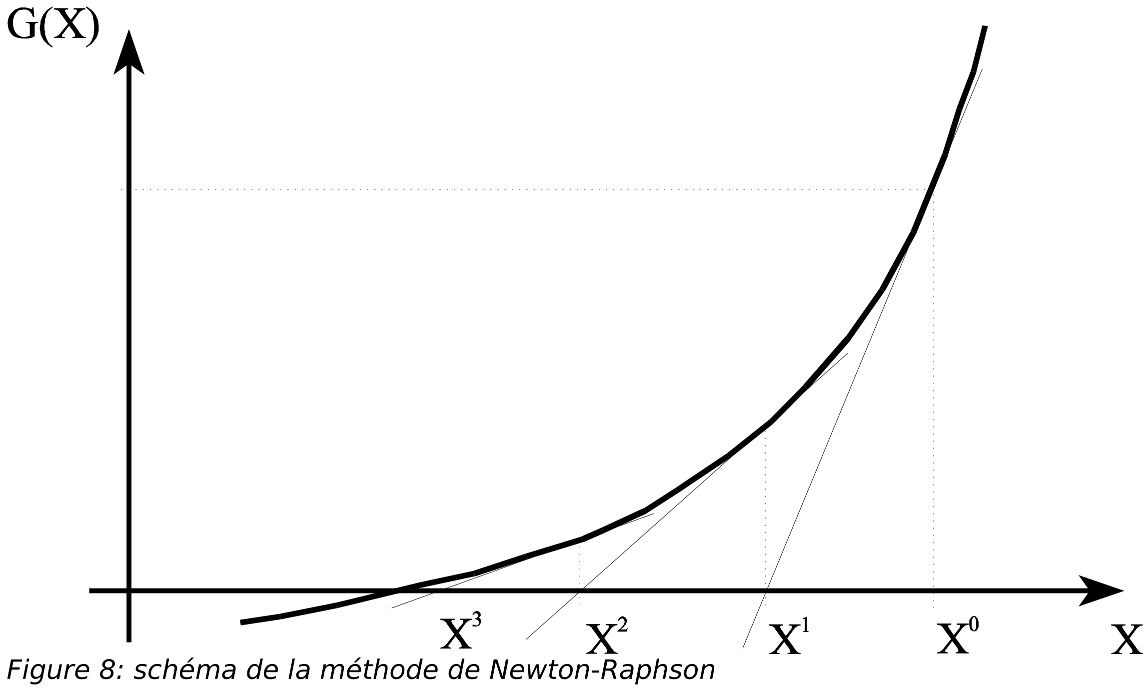


Figure 8: schéma de la méthode de Newton-Raphson

4.2.4.2. La méthode de Newton-Raphson dégénérée

C'est une méthode de type Newton-Raphson dégénérée qui a été retenue pour résoudre notre équation F(X) = B que l'on écrit pour l'occasion G(X) = 0 avec G(X) défini par F(X) − B.

L'inconvénient de la méthode de Newton-Raphson classique est d'être coûteuse en temps de calcul du fait qu'elle impose l'évaluation d'une matrice jacobienne et la résolution d'un système linéaire à chaque itération.

Une première simplification revient à considérer que les variations de Q et de Z au cours d'un pas de temps sont petites. La solution est alors proche de zéro puisque les inconnues sont ces mêmes variations ΔQ_i et ΔZ_i, on se contente alors de faire la première itération en choisissant zéro comme valeur initiale. Il s'agit de ce qu'on a appelé précédemment la linéarisation du système discret. On résout donc le système suivant :

$$\begin{cases} X^0 = 0 \\ X^1 = X^0 + \left[DF(X^0)\right]^{-1} \cdot \left(B - F(X^0)\right) \end{cases} \tag{4.50}$$

Ce qui donne le système linéaire :

$$DF(0) \cdot X^1 = B - F(0) \tag{4.51}$$

Mais cette simplification est trop restrictive. En effet, il arrive souvent que la solution ne puisse être considérée comme vraiment voisine de zéro. C'est notamment le cas lors de crues rapides ou d'un écoulement soumis à une influence aval sensible comme, par exemple, une marée qui peut inverser le sens de l'écoulement en période de hautes eaux. Aussi pour améliorer la solution approchée il faut poursuivre les itérations :

$$X^{k+1} = X^k + \left[DF(X^k)\right]^{-1} \cdot \left(B - F(X^k)\right) \tag{4.52}$$

C'est ici qu'intervient la deuxième simplification. Afin de gagner du temps de calcul, on supprime le calcul de la matrice jacobienne DF(X^k) à chaque itération en la remplaçant par la matrice DF(0) initiale. Cette méthode est connue sous le nom de méthode de Newton-Raphson dégénérée. Les itérations s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} X^{k+1} &= X^k + \left[DF(0)\right]^{-1} \cdot \left(B - F(X^k)\right) \\ \text{soit} \qquad DF(0) \cdot X^{k+1} &= DF(0) \cdot X^k + \left(B - F(X^k)\right) \end{aligned} \tag{4.53}$$

Enfin si on note $C^k = DF(0) \cdot X^k$ les itérations s'écrivent :

$$\begin{cases} X^0 = 0 \quad ; \quad C^0 = 0 \\ C^{k+1} = C^k + \left[B - F(X^k)\right] \\ DF(0) X^{k+1} = C^{k+1} \end{cases} \tag{4.54}$$

Sur cette dernière expression on voit que la méthode itérative revient à résoudre plusieurs fois le même système linéaire avec chaque fois un nouveau second membre déduit du précédent en lui ajoutant la correction (B − F(X^k)) ce qui demande seulement une évaluation de F.

NB. : ici F(0) = 0 puisque F est une combinaison linéaire de variations d'opérateurs comme w et σ (cf. chapitre 4.1.4) qui sont elles-mêmes nulles en zéro.

Cette méthode converge si F est convexe [réf biblio]

4.2.4.3. Le calcul de DF(0) : la linéarisation

Dans le cas de la méthode *Debord* la matrice DF(0) se présente sous la forme d'une matrice d'ordre 2N dont la première et la dernière ligne sont respectivement les discrétisations des conditions amont et aval. Les autres lignes correspondent aux équations de Saint-Venant. Le calcul de DF(0) revient en fait à linéariser les équations discrétisées en ne conservant que les termes du premier ordre en ΔQ_i et ΔZ_i. Voir le code source pour le détail des calculs.

Cette linéarisation, appliquée aux deux équations de Saint-Venant discrétisées entre les sections de calcul consécutives i et i+1, nous donne un couple d'équations en ΔQ_i, ΔZ_i, ΔQ_{i+1} et ΔZ_{i+1} :

$$\begin{cases} A_{11} \Delta Q_i + A_{12} \Delta Z_i = B_{11} \Delta Q_{i+1} + B_{12} \Delta Z_{i+1} + B_{13} \\ A_{21} \Delta Q_i + A_{22} \Delta Z_i = B_{21} \Delta Q_{i+1} + B_{22} \Delta Z_{i+1} + B_{23} \end{cases} \tag{4.55}$$

De même on applique cette linéarisation aux conditions aux limites discrétisées. Nous avons vu que la condition à la limite amont s'écrivait $\Delta Q_1 = Q(x_1, t + \Delta T) - Q(x_1, t)$. Cette équation, déjà linéaire, peut facilement s'écrire sous la forme $R_M \Delta Q_1 + S_M \Delta Q_1 = T_M$ dite souvent *relation d'impédance* ou R-S-T en raison même de sa forme. Dans ce cas on a :

$$\begin{cases} R_M = 1 \\ S_M = 0 \\ T_M = Q(x_1, t+\Delta t) - Q(x_1, t) \end{cases} \tag{4.56}$$

Une condition à la limite aval sous la forme d'un limnigramme $Z_V(t)$ est également linéaire et s'écrit facilement $R_V \Delta Q_N + S_V \Delta Q_N = T_V$ avec :

$$\begin{cases} R_V = 0 \\ S_V = 1 \\ T_V = Z_V(t+\Delta t) - Z_V(t) = Z(x_N, t+\Delta t) - Z(x_N, t) \end{cases} \tag{4.57}$$

Une condition à la limite aval sous la forme d'une loi de tarage $Q_Z(Z)$ n'est pas linéaire, on la linéarise donc et on l'écrit également sous la forme $R_V \Delta Q_N + S_V \Delta Q_N = T_V$ avec :

$$\begin{cases} R_V = 1 \\ S_V = \dfrac{QZ(Z_N+\epsilon) - QZ(Z_N-\epsilon)}{2\epsilon} \\ T_V = QZ(Z_N) - Q(x_N, t) \end{cases} \tag{4.58}$$

À chaque itération de Newton-Raphson dégénérée, on est donc amené à résoudre un système linéaire donné par :

$$\begin{cases} R_M \Delta Q_1 + S_M \Delta Z_1 = T_M \\ \ldots \\ A_{11}^i \Delta Q_i + A_{12}^i \Delta Z_i - B_{11}^{i+1} \Delta Q_{i+1} - B_{12}^{i+1} \Delta Z_{i+1} = B_{13}^{i+1} \\ A_{21}^i \Delta Q_i + A_{22}^i \Delta Z_i - B_{21}^{i+1} \Delta Q_{i+1} - B_{22}^{i+1} \Delta Z_{i+1} = B_{23}^{i+1} \\ \ldots \\ R_V \Delta Q_N + S_V \Delta Z_N = T_V \end{cases} \tag{4.59}$$

4.2.4.4. L'opération de « cadrage »

De manière à faciliter les calculs à venir, et pour des raisons de stabilité numérique, on transforme aisément le couple d'équations :

$$\begin{cases} A_{11}^i \Delta Q_i + A_{12}^i \Delta Z_i - B_{11}^{i+1} \Delta Q_{i+1} - B_{12}^{i+1} \Delta Z_{i+1} = B_{13}^{i+1} \\ A_{21}^i \Delta Q_i + A_{22}^i \Delta Z_i - B_{21}^{i+1} \Delta Q_{i+1} - B_{22}^{i+1} \Delta Z_{i+1} = B_{23}^{i+1} \end{cases} \tag{4.60}$$

pour obtenir, avec des notations dont la justification apparaîtra au paragraphe suivant :

$$\begin{cases} \Delta Q_i - b_{i+1} \Delta Q_{i+1} - a_{i+1} \Delta Z_{i+1} = c_{i+1} \\ \Delta Z_i - e_i \Delta Q_{i+1} - d_i \Delta Z_{i+1} = f_i \end{cases} \tag{4.61}$$

En fait on transforme :

$$\boldsymbol{A_i} \cdot \begin{bmatrix} \Delta Q_i \\ \Delta Z_i \end{bmatrix} = \boldsymbol{B_{i+1}} \cdot \begin{bmatrix} \Delta Q_{i+1} \\ \Delta Z_{i+1} \end{bmatrix} + C_{i+1} \tag{4.62}$$

en

$$\begin{bmatrix} \Delta Q_i \\ \Delta Z_i \end{bmatrix} = \boldsymbol{A_i^{-1}} \cdot \boldsymbol{B_{i+1}} \cdot \begin{bmatrix} \Delta Q_{i+1} \\ \Delta Z_{i+1} \end{bmatrix} + \boldsymbol{A_i^{-1}} \cdot C_{i+1} \tag{4.63}$$

où A_i, B_{i+1} sont des matrices 2 x 2 et C_{i+1} un vecteur. Pour que cette opération soit possible il faut et il suffit que les matrices A_i soient inversibles.

4.2.4.5. Le double balayage

Le système linéaire est alors résolu par la méthode dite du double balayage. Cette méthode est en fait la méthode de décomposition L.U de Gauss adaptée à la structure tridiagonale de notre matrice.

On commence par permuter les deux équations (4.61) obtenues lors de l'opération de cadrage de façon que le coefficient unité de ΔZ_i se retrouve sur la diagonale. Le système linéaire à résoudre à chaque itération s'écrit donc de manière matricielle :

$$\begin{pmatrix} R_M & S_M & & & & & & & & & & \\ 0 & 1 & -e_1 & -d_1 & & & & & & & & \\ 1 & 0 & -b_2 & -a_2 & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & 0 & 1 & -e_i & -d_i & & & & \\ & & & & 1 & 0 & -b_{i+1} & -a_{i+1} & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & 0 & 1 & -e_{N-1} & -d_{N-1} \\ & & & & & & & & 1 & 0 & -b_N & -a_N \\ & & & & & & & & & & R_V & S_V \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Delta Q_1 \\ \Delta Z_1 \\ \Delta Q_2 \\ \\ \Delta Z_i \\ \Delta Q_{i+1} \\ \\ \Delta Z_{N-1} \\ \Delta Q_N \\ \Delta Z_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_M \\ f_1 \\ c_2 \\ \\ f_i \\ c_{i+1} \\ \\ f_{N-1} \\ c_N \\ \%T_V \end{pmatrix} \tag{4.64}$$

Le premier balayage part de l'amont et consiste à rendre la matrice triangulaire supérieure par élimination des inconnues ΔQ_i dans les équations de coefficients b, a et c. On élimine ainsi les coefficients unité des lignes impaires de la matrice par combinaisons avec les deux lignes précédentes.

Précisément, pour deux sections consécutives i et i+1, on se trouve dans la situation suivante :

$$\begin{array}{ll} (a) & R_i \cdot \Delta Q_i + S_i \cdot \Delta Z_i = T_i \\ (b) & \Delta Z_i - e_i \cdot \Delta Q_{i+1} - d_i \cdot \Delta Z_{i+1} = f_i \\ (c) & \Delta Q_i - b_{i+1} \cdot \Delta Q_{i+1} - a_{i+1} \cdot \Delta Z_{i+1} = c_{i+1} \end{array} \tag{4.65}$$

On multiplie (b) par S_i et (c) par R_i puis on enlève (a) au résultat. À la place de (c) on obtient :

$$\begin{array}{l} (c^*) \quad R^*_{i+1} \cdot \Delta Q_{i+1} + S^*_{i+1} \cdot \Delta Z_{i+1} = T^*_{i+1} \\ \text{avec} \\ \qquad R^*_{i+1} = -(R_i \cdot b_{i+1} + S_i \cdot e_i) \\ \qquad S^*_{i+1} = -(R_i \cdot a_{i+1} + S_i \cdot d_i) \\ \qquad T^*_{i+1} = -T_i + R_i \cdot c_{i+1} + S_i \cdot f_i \end{array} \tag{4.66}$$

On normalise enfin (c*) par $\sqrt{R^{*2}_{i+1} + S^{*2}_{i+1}}$ ce qui nous donne une nouvelle équation (dite R-S-T ou relation d'impédance) :

$$R_{i+1} \cdot \Delta Q_{i+1} + S_{i+1} \cdot \Delta Z_{i+1} = T_{i+1} \tag{4.67}$$

avec R_{i+1} sur la diagonale. La permutation des équations faite précédemment a ainsi permis de propager l'information sur Q de l'amont vers l'aval grâce au premier balayage. Il en résulte le système triangularisé (4.68) :

$$\begin{pmatrix}
R_M & S_M & & & & & & & & & \\
 & 1 & -e_1 & -d_1 & & & & & & & \\
 & & R_2 & S_2 & & & & & & & \\
 & & & & \ddots & & & & & & \\
 & & & & 1 & -e_i & -d_i & & & & \\
 & & & & & R_{i+1} & S_{i+1} & & & & \\
 & & & & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & & & 1 & -e_{N-1} & -d_{N-1} \\
 & & & & & & & & R_N & S_N \\
 & & & & & & & & R_V & S_V
\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Delta Q_1 \\ \Delta Z_1 \\ \Delta Q_2 \\ \vdots \\ \Delta Z_i \\ \Delta Q_{i+1} \\ \vdots \\ \Delta Z_{N-1} \\ \Delta Q_N \\ \Delta Z_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_M \\ f_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ f_i \\ T_{i+1} \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ T_N \\ \%T_V \end{pmatrix} \tag{4.68}$$

Le système triangulaire (4.68) est trivialement résolu par le deuxième balayage qui se fait à partir de l'aval en commençant par résoudre le petit système 2 x 2 en ΔQ_N et ΔZ_N.

On vient alors de réaliser une itération de la méthode de Newton-Raphson dégénérée. Si le test d'arrêt n'est pas satisfait, on corrige le second membre du système linéaire et on relance la résolution.

Lorsque la méthode a convergé, on obtient la solution de l'écoulement dans le bief au temps t+Δt. On peut alors calculer la solution au pas de temps suivant. Cette résolution transitoire nécessite donc de disposer d'une condition initiale pour démarrer le calcul.

4.2.4.6. Les itérations

4.2.4.6.1. Correction du système discret

La correction $(B-F(X^k))$ s'applique au système original avant l'opération de cadrage qu'il faut donc refaire à nouveau sur le second membre corrigé. Ensuite on peut répéter le double balayage complet : permutation des équations b-a-c et e-d-f, transformation des équations b-a-c en R-S-T c'est-à-dire descente du premier balayage, résolution du système 2 x 2 aval, remontée du deuxième balayage.

4.2.4.6.2. Test d'arrêt des itérations

Les itérations sont poursuivies tant que l'écart entre deux itérées successives k+1 et k n'est pas assez petit. Comme il se doit, l'écart est mesuré en valeurs relatives, on évalue donc séparément (y_i étant le tirant d'eau) :

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{i=N}\left[\Delta Q_i^{k+1}-\Delta Q_i^k\right]^2}}{Min\left(1, Max\left(\left|Q_i\right|, i=1,\cdots,N\right)\right)} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{i=N}\left[\Delta Z_i^{k+1}-\Delta Z_i^k\right]^2}}{Max\left(y_i, i=1,\cdots,N\right)} \tag{4.69}$$

On arrête les itérations quand tous les deux sont inférieurs au seuil fixé par l'utilisateur (la valeur par défaut dans MAGE étant de 10^{-9}). Les variations de débits sont normalisées par les débits au pas de temps précédent avec une valeur minimale de 1 pour éviter des problèmes numériques quand les débits sont voisins de zéro. Si on ne prend pas cette précaution élémentaire on ne peut pas simuler correctement le simple remplissage d'un bief horizontal par un apport latéral sans apport amont (cette situation peut se présenter dans le monde réel sur un bief isolé par des ouvrages dans une maille) ou l'inversion du sens d'écoulement d'un tronçon de rivière soumis à une marée montante qui impose la transition par un débit nul.

Les variations de niveau sont normalisées par les tirants d'eau au pas de temps précédent et non par les cotes. En effet normaliser par les cotes aurait pour effet d'écraser artificiellement les variations de niveau pour peu que le bief soit situé en altitude. Même en translatant toutes les cotes de façon que la plus basse soit nulle (ce qui ne change rien à la solution des équations de Saint-Venant), un bief long avec une pente un peu forte aurait le même problème.

MAGE permet de définir un critère d'arrêt différent pour Q et Z ce qui est utile dans les cas où les conditions de convergence se révèlent plus délicates pour une variable que pour l'autre.

4.2.5. Itérations et double balayage dans le cas de la méthode ISM

Complété par les conditions aux limites amont et aval, le système discret, dans le cas de la méthode ISM, devient :

$$\begin{array}{c} 4N \\ \text{équations} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} CLMm(\Delta Qm_1, \Delta Ql_1, \Delta Qr_1, \Delta Z_1) \\ CLMl(\Delta Qm_1, \Delta Ql_1, \Delta Qr_1, \Delta Z_1) \\ CLMr(\Delta Qm_1, \Delta Ql_1, \Delta Qr_1, \Delta Z_1) \\ EC(\Delta Qm_1, \Delta Ql_1, \Delta Qr_1, \Delta Z_1, \Delta Qm_2, \Delta Ql_2, \Delta Qr_2, \Delta Z_2) \\ EM(\Delta Qm_1, \Delta Ql_1, \Delta Qr_1, \Delta Z_1, \Delta Qm_2, \Delta Ql_2, \Delta Qr_2, \Delta Z_2) \\ EL(\Delta Qm_1, \Delta Ql_1, \Delta Qr_1, \Delta Z_1, \Delta Qm_2, \Delta Ql_2, \Delta Qr_2, \Delta Z_2) \\ ER(\Delta Qm_1, \Delta Ql_1, \Delta Qr_1, \Delta Z_1, \Delta Qm_2, \Delta Ql_2, \Delta Qr_2, \Delta Z_2) \\ \cdots \\ EC(\Delta Qm_i, \Delta Ql_i, \Delta Qr_i, \Delta Z_i, \Delta Qm_{i+1}, \Delta Ql_{i+1}, \Delta Qr_{i+1}, \Delta Z_{i+1}) \\ EM(\Delta Qm_i, \Delta Ql_i, \Delta Qr_i, \Delta Z_i, \Delta Qm_{i+1}, \Delta Ql_{i+1}, \Delta Qr_{i+1}, \Delta Z_{i+1}) \\ EL(\Delta Qm_i, \Delta Ql_i, \Delta Qr_i, \Delta Z_i, \Delta Qm_{i+1}, \Delta Ql_{i+1}, \Delta Qr_{i+1}, \Delta Z_{i+1}) \\ ER(\Delta Qm_i, \Delta Ql_i, \Delta Qr_i, \Delta Z_i, \Delta Qm_{i+1}, \Delta Ql_{i+1}, \Delta Qr_{i+1}, \Delta Z_{i+1}) \\ \cdots \\ EC(\Delta Qm_{N-1}, \Delta Ql_{N-1}, \Delta Qr_{N-1}, \Delta Z_{N-1}, \Delta Qm_N, \Delta Ql_N, \Delta Qr_N, \Delta Z_N) \\ EM(\Delta Qm_{N-1}, \Delta Ql_{N-1}, \Delta Qr_{N-1}, \Delta Z_{N-1}, \Delta Qm_N, \Delta Ql_N, \Delta Qr_N, \Delta Z_N) \\ EL(\Delta Qm_{N-1}, \Delta Ql_{N-1}, \Delta Qr_{N-1}, \Delta Z_{N-1}, \Delta Qm_N, \Delta Ql_N, \Delta Qr_N, \Delta Z_N) \\ ER(\Delta Qm_{N-1}, \Delta Ql_{N-1}, \Delta Qr_{N-1}, \Delta Z_{N-1}, \Delta Qm_N, \Delta Ql_N, \Delta Qr_N, \Delta Z_N) \\ CLV(\Delta Qm_N, \Delta Ql_N, \Delta Qr_N, \Delta Z_N) \end{array} \right. \tag{4.70}$$

Le système est ainsi fermé. On peut alors l'écrire de façon synthétique :

$$F(X) = B \tag{4.71}$$

Avec $X = (\Delta Qm_1, \Delta Ql_1, \Delta Qr_1, \Delta Z_1, \cdots, \Delta Qm_i, \Delta Ql_i, \Delta Qr_i, \Delta Z_i, \cdots, \Delta Qm_N, \Delta Ql_N, \Delta Qr_N, \Delta Z_N)$ le vecteur des inconnues et B est le second membre constitué des termes connus.

Comme dans le cas de la méthode *Debord*, ce système est non linéaire. On utilisera la même méthode de Newton-Raphson dégénérée pour le résoudre.

4.2.5.1. Le calcul de DF(0) : la linéarisation

Dans le cas de la méthode ISM, la matrice DF(0) se présente sous la forme d'une matrice d'ordre 4N dont les 3 premières lignes et la dernière ligne sont respectivement les discrétisations des conditions amont et aval. Les autres lignes correspondent aux équations de Saint-Venant. Le calcul de DF(0) revient en fait à linéariser les équations discrétisées en ne conservant que les termes du premier ordre en ΔQm_i , ΔQl_i , ΔQr_i et Δz_i. Voir le code source pour le détail des calculs.

Cette linéarisation, appliquée aux 1+3 équations de Saint-Venant discrétisées entre les sections de calcul consécutives i et i+1, nous donne 4 équations en ΔQm_i , ΔQl_i , ΔQr_i , ΔZ_i , ΔQm_{i+1} , ΔQl_{i+1} , ΔQr_{i+1} et ΔZ_{i+1} :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} A_{11}\Delta Qm_i + A_{12}\Delta Ql_i + A_{13}\Delta Qr_i + A_{14}\Delta Z_i &=& B_{11}\Delta Qm_{i+1} + B_{12}\Delta Ql_{i+1} + B_{13}\Delta Qr_{i+1} + B_{14}\Delta Z_{i+1} + B_{15} \\ A_{21}\Delta Qm_i + A_{22}\Delta Ql_i + A_{23}\Delta Qr_i + A_{24}\Delta Z_i &=& B_{21}\Delta Qm_{i+1} + B_{22}\Delta Ql_{i+1} + B_{23}\Delta Qr_{i+1} + B_{24}\Delta Z_{i+1} + B_{25} \\ A_{31}\Delta Qm_i + A_{32}\Delta Ql_i + A_{33}\Delta Qr_i + A_{34}\Delta Z_i &=& B_{31}\Delta Qm_{i+1} + B_{32}\Delta Ql_{i+1} + B_{33}\Delta Qr_{i+1} + B_{34}\Delta Z_{i+1} + B_{35} \\ A_{41}\Delta Qm_i + A_{42}\Delta Ql_i + A_{43}\Delta Qr_i + A_{44}\Delta Z_i &=& B_{41}\Delta Qm_{i+1} + B_{42}\Delta Ql_{i+1} + B_{43}\Delta Qr_{i+1} + B_{44}\Delta Z_{i+1} + B_{45} \end{array} \right. \tag{4.72}$$

De même on applique cette linéarisation aux conditions aux limites discrétisées. Nous avons vu que la condition à la limite amont était définie par 3 équations, une pour chaque débit partiel :

$$\begin{aligned}\Delta Qm_1 &= Qm(x_1,t+\Delta t)-Qm(x_1,t)\\ \Delta Ql_1 &= Ql(x_1,t+\Delta t)-Ql(x_1,t)\\ \Delta Qr_1 &= Qr(x_1,t+\Delta t)-Qr(x_1,t)\end{aligned} \tag{4.73}$$

Chacune de ces équations, déjà linéaires, peut être facilement écrite sous la forme d'une *relation d'impédance* ou R-S-T comme dans le cas de la méthode *Debord*. On a ainsi :

$$\begin{aligned}R_k &= 1\\ S_k &= 0 \qquad\qquad \text{avec } k=m,l,r\\ T_k &= Qk(x_1,t+\Delta t)-Qk(x_1,t)\end{aligned} \tag{4.74}$$

Une condition à la limite aval sous la forme d'un limnigramme $Z_V(t)$ est également linéaire et s'écrit facilement $R_V(\Delta Qm_N+\Delta Ql_N+\Delta Qr_N) + S_V\Delta Z_N = T_V$ avec :

$$\begin{cases}R_V = 0\\ S_V = 1\\ T_V = Z_V(t+\Delta t)-Z_V(t) = Z(x_N,t+\Delta t)-Z(x_N,t)\end{cases} \tag{4.75}$$

Une condition à la limite aval sous la forme d'une loi de tarage $Q_Z(Z)$ n'est pas linéaire, on la linéarise donc et on l'écrit également sous la même forme avec :

$$\begin{cases}R_V = 1\\ S_V = \dfrac{QZ(Z_N+\epsilon)-QZ(Z_N-\epsilon)}{2\epsilon}\\ T_V = QZ(Z_N)-Q(x_N,t)\end{cases} \tag{4.76}$$

À chaque itération de Newton-Raphson dégénérée, on est donc amené à résoudre un système linéaire donné par :

$$\begin{cases}R_m\Delta Qm_1+S_m\Delta Z_1 = T_m\\ R_l\Delta Ql_1+S_l\Delta Z_1 = T_l\\ R_r\Delta Qr_1+S_r\Delta Z_1 = T_r\\ \dots\dots\dots\\ A^i_{11}\Delta Qm_i+A^i_{12}\Delta Ql_i+A^i_{13}\Delta Qr_i+A^i_{14}\Delta Z_i-B^i_{11}\Delta Qm_{i+1}-B^i_{12}\Delta Ql_{i+1}-B^i_{13}\Delta Qr_{i+1}-B^i_{14}\Delta Z_{i+1} = B^i_{15}\\ A^i_{21}\Delta Qm_i+A^i_{22}\Delta Ql_i+A^i_{23}\Delta Qr_i+A^i_{24}\Delta Z_i-B^i_{21}\Delta Qm_{i+1}-B^i_{22}\Delta Ql_{i+1}-B^i_{23}\Delta Qr_{i+1}-B^i_{24}\Delta Z_{i+1} = B^i_{25}\\ A^i_{31}\Delta Qm_i+A^i_{32}\Delta Ql_i+A^i_{33}\Delta Qr_i+A^i_{34}\Delta Z_i-B^i_{31}\Delta Qm_{i+1}-B^i_{32}\Delta Ql_{i+1}-B^i_{33}\Delta Qr_{i+1}-B^i_{34}\Delta Z_{i+1} = B^i_{35}\\ A^i_{41}\Delta Qm_i+A^i_{42}\Delta Ql_i+A^i_{43}\Delta Qr_i+A^i_{44}\Delta Z_i-B^i_{41}\Delta Qm_{i+1}-B^i_{42}\Delta Ql_{i+1}-B^i_{43}\Delta Qr_{i+1}-B^i_{44}\Delta Z_{i+1} = B^i_{45}\\ \dots\dots\dots\\ R_V\Delta Qm_N+R_V\Delta Ql_N+R_V\Delta Qr_N+S_V\Delta Z_N = T_V\end{cases} \tag{4.77}$$

L'adaptation au cas du système à 4N équations d'ISM de la méthode de double-balayage décrite pour la méthode Debord ne donne pas un résultat robuste, la méthode de résolution est instable. À la place on utilise une méthode de résolution d'un système linéaire tridiagonal par blocs. En effet en groupant les équations de (4.77) par paquets de 4 à partir du début on voit apparaître un système tridiagonal par blocs 4x4 qu'il est aisé de résoudre par l'algorithme classique pour un système tridiagonal où les scalaires sont remplacés par des matrices carrées 4x4. Il suffit de prendre garde que les opérations « arithmétiques » comme la multiplication et la division ne sont plus commutatives.

Ajouter des détails ?

4.2.5.2. Les itérations

4.2.5.2.1. Correction du système discret

La correction (*B-F(X^k)*) s'applique au système original avant l'opération de cadrage qu'il faut donc refaire à nouveau sur le second membre corrigé. Ensuite on peut refaire la résolution complète.

4.2.5.2.2. Test d'arrêt des itérations

Les itérations sont poursuivies tant que l'écart entre deux itérées successives k+1 et k n'est pas assez petit. Comme il se doit, l'écart est mesuré en valeurs relatives, on évalue donc séparément (y_i étant le tirant d'eau) :

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{i=N}\left[\Delta Qw_i^{k+1}-\Delta Qw_i^k\right]^2}}{Min\left(1, Max\left(\left|Qw_i\right|, i=1,\cdots,N\right)\right)}(\text{avec } w=m,l,r) \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{i=N}\left[\Delta Z_i^{k+1}-\Delta Z_i^k\right]^2}}{Max\left(y_i, i=1,\cdots,N\right)} \tag{4.78}$$

On arrête les itérations quand tous les deux sont inférieurs au seuil fixé par l'utilisateur (la valeur par défaut dans MAGE étant de 10^{-9}). Les variations de débits sont normalisées par les débits au pas de temps précédent avec une valeur minimale de 1 pour éviter des problèmes numériques quand les débits sont voisins de zéro.

Les variations de niveau sont normalisées par les tirants d'eau au pas de temps précédent et non par les cotes.

4.2.6. La gestion du temps

4.2.6.1. La condition initiale

La condition initiale est la donnée de l'état de l'écoulement dans le réseau à l'instant initial. Cette donnée est nécessaire pour pourvoir démarrer la simulation. Généralement il s'agit d'un écoulement permanent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = 0 \\ \dfrac{\partial Z(x,t)}{\partial t} = 0 \end{cases} \tag{4.79}$$

Mais ce peut être aussi un état final quelconque obtenu d'une précédente simulation. Il est essentiel que cet état initial soit une bonne solution des équations de Saint-Venant pour que la simulation puisse démarrer. Dans le cas contraire les défauts de cette pseudo-solution initiale imposent des compensations en volume (équation de continuité) ou en vitesse (équation de quantité de mouvement) qui engendrent souvent des difficultés numériques faisant échouer le calcul (voir § 13.3 Construction d'un état initial).

4.2.6.2. La boucle sur le temps

Le passage au pas de temps suivant se fait en actualisant les variables qui représentent le débit et la cote de la surface libre :

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_i + \Delta Q_i \quad \text{pour } i=1 \text{ à } N \\ Z_i &= Z_i + \Delta Z_i \quad \text{pour } i=1 \text{ à } N \end{aligned} \tag{4.80}$$

Le pas de temps lui-même peut être fixe et choisi par l'utilisateur ou bien calculé par le code pour l'adapter aux contraintes de l'écoulement. Dans MAGE on donne un pas de temps maximal et un pas de temps minimal et le code adapte le pas de temps en fonction de plusieurs critères contrôlés par l'utilisateur :

- réduction du pas de temps en cas de divergence ou de non-convergence des itérations ;
- maintien d'un nombre de Courant constant ;
- adaptation en fonction de la dynamique des ouvrages mobiles soumis à régulation ;
- utiliser le pas de temps le plus grand possible tout en respectant les contraintes précédentes.

5. Généralisation de la méthode de résolution pour un réseau

5.1. Cas de la méthode *Debord*

5.1.1. Adaptation au cas d'un réseau ramifié

La méthode que nous venons de voir sur un bief unique est applicable au cas d'un réseau ramifié mais nécessite une adaptation. En effet, le double balayage, constituant en fait la transmission des conditions aux limites au reste du modèle, va être bloqué aux nœuds confluents par manque d'informations. Pour fermer le système, on ajoute des équations d'interface aux nœuds.

5.1.1.1. Les équations d'interface aux nœuds

Ces équations rendent compte du raccordement entre les biefs ou branches du réseau. Elles sont au nombre de deux par nœud : une équation de continuité et une équation dynamique.

Si on considère un nœud faisant la liaison entre n biefs, l'équation de continuité exprime la conservation des débits tandis que l'équation dynamique traduit la perte de charge liée au passage du nœud ; dans MAGE nous négligeons cette perte de charge, aussi l'équation dynamique exprime l'égalité des cotes aux points de calcul adjacents au nœud. On a alors :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n1} Q_{M,k} = \sum_{j=1}^{n2} Q_{V,j} & \text{équation de continuité} \\ Z_{M,k} = Z_{V,j} \quad \forall k \in [1,\cdots,n1] \;\; et \;\; \forall j \in [1,\cdots,n2] & \text{équation dynamique} \end{cases} \tag{5.1}$$

où on note n1 le nombre de biefs arrivant au nœud, n2 le nombre de biefs partant du nœud, $Q_{M,k}$ le débit à l'amont du bief k, $Q_{V,k}$ le débit à l'aval du bief k, $Z_{M,k}$ la cote à l'amont du bief k et $Z_{V,k}$ la cote à l'aval du bief k.

En toute généralité il faut tenir compte du volume stocké dans le nœud (casier ≈ nœud à surface non nulle, c'est-à-dire un nœud pour lequel on autorise un stockage de volume) et des apports par affluent ou déversement, l'équation de continuité devient alors :

$$S(Z)\frac{\partial Z}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n1} Q_{V,j} - \sum_{k=1}^{n2} Q_{M,k} + Q_a(t) + Q_{dev}(t) \tag{5.2}$$

Les apports étant ici comptés positivement s'ils sont entrants.

5.1.1.2. Le principe de résolution avec *Debord*

On peut désormais appliquer le double balayage. La résolution, sur le réseau ramifié représenté par la Figure 9 se présente de la façon suivante : on réalise un premier balayage dans chacun des biefs amont (bief 1 et bief 2). On obtient alors deux relations d'impédance R-S-T au nœud 3. En combinant ces relations aux équations d'interface au nœud 3, on trouve une relation d'impédance à l'amont du bief aval. On peut alors poursuivre le premier balayage jusqu'au nœud 4 et aboutir au système triangularisé.

On procède alors au deuxième balayage, la cote obtenue à l'amont du bief aval servant de condition aval pour chacun des biefs amont (bief 1 et bief 2).

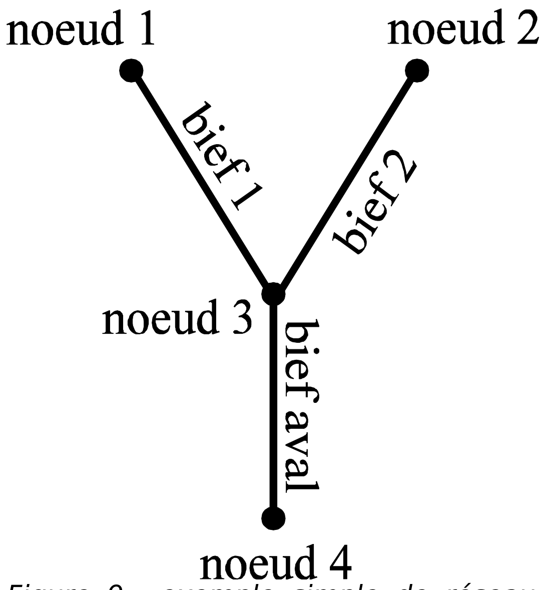


Figure 9 : exemple simple de réseau ramifié

5.1.2. Résolution dans le cas d'une maille : la méthode de condensation

5.1.2.1. Le problème

On a vu précédemment que dans le cas d'un réseau ramifié on pouvait « descendre » le 1^er balayage depuis l'amont jusqu'à l'aval sans aucun problème : il suffit de composer les relations d'impédance obtenues à l'aval de chacun des biefs amont d'un confluent pour obtenir une relation d'impédance à l'amont de l'unique bief aval de ce confluent.

Dans le cas d'une diffluence on ne peut pas procéder de même puisqu'il y a plusieurs biefs à l'aval de la diffluence. Autrement dit, on ne sait pas à priori quelle est la répartition des débits dans les différents biefs défluents.

La méthode dite du « double balayage » (c'est-à-dire en fait la traditionnelle méthode d'élimination de Gauss adaptée à la structure particulière de la matrice qui contient des 1 à des places déterminées) ayant des propriétés de stabilité numérique, d'encombrement mémoire et de modularité bien agréables, les concepteurs de modèles ont cherché un moyen de l'étendre au cas des réseaux maillés. C'est la méthode de condensation [ref biblio] qui permet de calculer la répartition des débits entre les différents biefs avals d'un diffluence.

5.1.2.2. Les méthodes

Pour le calcul de la ligne d'eau dans un réseau maillé ou ramifié on dispose des informations suivantes :

- Les équations de Saint-Venant discrétisées qui relient les débits et cotes (ou leurs variations) entre 2 sections consécutives d'un même bief. Si une section est singulière les équations de Saint-Venant sont remplacées par les équations de la singularité.
- Les relations aux nœuds :
  - égalité des cotes
  - conservation des volumes : la somme des débits entrant est égale à la somme des débits sortants moins la variation du volume stocké.
- Les conditions aux limites amont et aval.

5.1.2.2.1. 1ère méthode

La plus simple dans son principe : on met toutes ces équations linéaires dans une matrice et on résout le système ainsi obtenu par une méthode quelconque plutôt itérative, car la matrice peut être grande et a beaucoup de coefficients nuls.

Cette méthode a l'inconvénient de nous obliger à abandonner le double balayage même dans le cas d'un réseau ramifié pour lequel il va très bien.

De plus, une méthode de résolution globale peut conduire à une matrice ayant une largeur de bande très grande selon la numérotation des sections employée (deux sections proches peuvent avoir des numéros éloignés ce qui correspond à des cases éloignées de la matrice). La matrice occupe alors une place mémoire très grande avec beaucoup de zéros stockés, ce qui est de la place perdue. Il faudrait donc définir une numérotation des points de calcul pour le cas maillé qui abandonnerait la numérotation utilisant les blocs naturels que sont les biefs.

5.1.2.2.2. 2e méthode

Considérons le réseau maillé suivant (Figure 10) ayant les nœuds A, B, C et D et les biefs 1, 2, 3 et 4 :

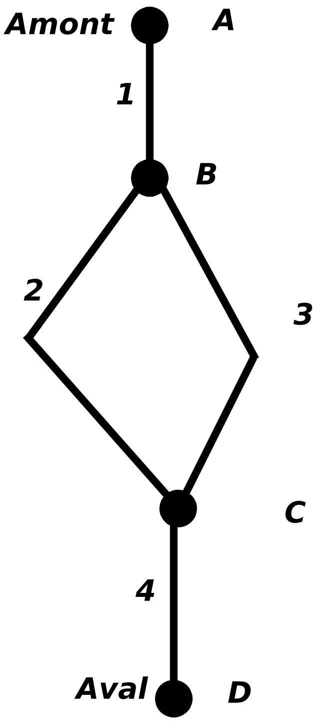


Figure 10: un réseau maillé

On peut procéder de la façon suivante :

1. on descend le 1er balayage de A vers B
2. de façon analogue on peut remonter un 1er balayage de D vers C en procédant de manière analogue à celle décrite précédemment mais en partant de l'aval au lieu de partir de l'amont.

On dispose alors d'une relation d'impédance (R-S-T) en B (amont) et d'une autre R-S-T en C (aval) soit :

$$\begin{gathered} R_1 \Delta Q_{1N} + S_1 \Delta Z_{1N} = T_1 \\ R_4 \Delta Q_{41} + S_4 \Delta Z_{41} = T_4 \end{gathered} \qquad (5.3)$$

Où ΔQ_{1N} représente la variation de débit dans la dernière (N) section du bief 1 et ΔQ_{41} la variation de débit dans la 1ère (1) section du bief 4.

On écrit maintenant les équations aux nœuds de maille, à savoir B et C.
En B :

$$\Delta Z_{21} = \Delta Z_{31} = \Delta Z_{1N} \qquad \text{(égalité des cotes)}$$

$$Q_{1N}+\Delta Q_{1N} = Q_{21}+\Delta Q_{21} + Q_{31}+\Delta Q_{31} \qquad \text{(conservation des volumes)} \tag{5.4}$$

soit encore :

$$\Delta Q_{21} + \Delta Q_{31} - \Delta Q_{1N} = (Q_{1N}-Q_{21}-Q_{31})$$

En C :

$$\Delta Z_{2N} = \Delta Z_{41} = \Delta Z_{3N} \qquad \text{(égalité des cotes)}$$

$$Q_{2N}+\Delta Q_{2N} + Q_{3N}+\Delta Q_{3N} = Q_{41}+\Delta Q_{41} \qquad \text{(conservation des volumes)} \tag{5.5}$$

soit encore :

$$\Delta Q_{2N} + \Delta Q_{3N} - \Delta Q_{41} = (Q_{41}-Q_{2N}-Q_{3N})$$

On a donc pour le moment les équations suivantes :

$$\begin{array}{l}
R_1 \cdot \Delta Q_{1N} + S_1 \cdot \Delta Z_{1N} = T_1 \\
\Delta Z_{21} - \Delta Z_{1N} = 0 \\
\Delta Z_{31} - \Delta Z_{1N} = 0 \\
\Delta Q_{21} + \Delta Q_{31} - \Delta Q_{1N} = Q_{1N}-Q_{21}-Q_{31} \\
R_4 \cdot \Delta Q_{41} + S_4 \cdot \Delta Z_{41} = T_4 \\
\Delta Z_{2N} - \Delta Z_{41} = 0 \\
\Delta Z_{3N} - \Delta Z_{41} = 0 \\
\Delta Q_{2N} + \Delta Q_{3N} - \Delta Q_{41} = Q_{41}-Q_{2N}-Q_{3N}
\end{array} \tag{5.6}$$

En éliminant $\Delta Q_{1N}, \ \Delta Z_{1N}, \ \Delta Q_{41} \ et \ \Delta Z_{41}$ on obtient les 4 équations suivantes :

$$\begin{array}{l}
\Delta Z_{21} - \Delta Z_{31} = 0 \\
\Delta Q_{21} + \Delta Q_{31} + \dfrac{S_1}{R_1} \Delta Z_{21} = Q_{1N}-Q_{21}-Q_{31}+\dfrac{T_1}{R_1} \\
\Delta Z_{2N} - \Delta Z_{3N} = 0 \\
\Delta Q_{2N} + \Delta Q_{3N} + \dfrac{S_4}{R_4}\Delta Z_{2N} = Q_{41}-Q_{2N}-Q_{3N}+\dfrac{T_4}{R_4}
\end{array} \tag{5.7}$$

Ces 4 équations ayant 8 inconnues, il faut trouver 4 autres équations pour fermer le système. Pour cela il suffit de trouver des relations qui relient les ΔQ et ΔZ entre l'amont et l'aval de chaque bief de la maille ((2) et (3)). On dispose bien de telles relations par l'intermédiaire des équations de Saint-Venant mais elles sont implicites puisqu'elles font intervenir les ΔQ et ΔZ dans les sections intérieures de chaque bief de maille. Plus précisément entre la section i et la section i+1 du bief (b) les équations de Saint-Venant discré-tisées peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \Delta Q_i \\ \Delta Z_i \end{bmatrix} = \boldsymbol{A_i} \cdot \begin{bmatrix} \Delta Q_{i+1} \\ \Delta Z_{i+1} \end{bmatrix} + \boldsymbol{B_i} \tag{5.8}$$

où $\mathbf{A_i}$ est une matrice 2 x 2 et $\mathbf{B_i}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$

La méthode de condensation consiste à combiner ces équations pour en obtenir une de la même forme reliant $(\Delta Q_1, \Delta Z_1)$ et $(\Delta Q_N, \Delta Z_N)$. On a en effet :

$$\begin{bmatrix} \Delta Q_1 \\ \Delta Z_1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A_1} \cdot \begin{bmatrix} \Delta Q_2 \\ \Delta Z_2 \end{bmatrix} + \boldsymbol{B_1} \ \ et \ \ \begin{bmatrix} \Delta Q_2 \\ \Delta Z_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A_2} \cdot \begin{bmatrix} \Delta Q_3 \\ \Delta Z_3 \end{bmatrix} + \boldsymbol{B_2} \tag{5.9}$$

En reportant la 2[e] équation dans la 1[ère] on obtient :

$$\begin{bmatrix}\Delta Q_1\\ \Delta Z_1\end{bmatrix} = \boldsymbol{A_1}\cdot\left[\boldsymbol{A_2}\cdot\begin{bmatrix}\Delta Q_3\\ \Delta Z_3\end{bmatrix} + \boldsymbol{B_2}\right] + \boldsymbol{B_1}$$
$$\begin{bmatrix}\Delta Q_1\\ \Delta Z_1\end{bmatrix} = \boldsymbol{A_1}\cdot\boldsymbol{A_2}\begin{bmatrix}\Delta Q_3\\ \Delta Z_3\end{bmatrix} + \boldsymbol{A_1}\cdot\boldsymbol{B_2} + \boldsymbol{B_1} \tag{5.10}$$

Ainsi de proche en proche, on obtient :

$$\begin{bmatrix}\Delta Q_1\\ \Delta Z_1\end{bmatrix} = \boldsymbol{A_1^N}\cdot\begin{bmatrix}\Delta Q_N\\ \Delta Z_N\end{bmatrix} + \boldsymbol{B_1^N} \tag{5.11}$$

ce qui, si on applique cette procédure pour chacun des 2 biefs de la maille, nous fournit bien 4 équations scalaires supplémentaires qui ferment le système (Étude de la régularité de ce système voir cas général).

Enfin, comme on a seulement besoin de connaître la répartition des débits, on peut, par combinaison des différents blocs, simplifier ce système d'ordre 8 en un système d'ordre 2 portant seulement sur les ΔQ amont des biefs de maille.

On dispose donc maintenant de la répartition du débit à la diffluence du nœud B. Pour continuer le calcul de la ligne d'eau, il suffit de faire le 1er balayage dans chaque bief de maille ((2) et (3)) en utilisant les relations :

$$\Delta Q_{2\,1} = \Delta Q_{2\,1}^{\text{calculé}}$$
$$\Delta Q_{3\,1} = \Delta Q_{3\,1}^{\text{calculé}} \tag{5.12}$$

obtenues précédemment comme premières équations.

Arrivé au point C on dispose de suffisamment d'informations pour calculer ΔQ_{41} et ΔZ_{41} à l'amont du bief 4 : on a les R-S-T à l'aval des biefs de maille, l'égalité des cotes au nœud C, la conservation du volume en C et la R'-S'-T' remontée de l'aval (D) par le 1er balayage Aval ⟶ Amont dans le bief 4.

Il suffit ensuite de faire le 2e balayage de façon analogue à ce qui est fait dans le cas d'un réseau ramifié.

Finalement le double balayage peut être schématisé par l'algorithme suivant :

1. 1er balayage à l'amont de la maille
2. 1er balayage à l'aval de la maille
3. Calcul de la répartition des débits dans la maille
4. 1er balayage dans la maille
5. 2e balayage sur tout le réseau.

5.1.3. Résolution de la maille dans le cas général

5.1.3.1. Les équations de condensations

Dans chaque bief on a une suite de relations linéaires de la forme (équation 5.8) :

$$\begin{bmatrix}\Delta Q_i\\ \Delta Z_i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}B_{i+1} & A_{i+1}\\ C_{i+1} & D_{i+1}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\Delta Q_{i+1}\\ \Delta Z_{i+1}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}C_{i+1}\\ F_{i+1}\end{bmatrix} \quad \forall\ i = 1,\dots,N-1 \tag{5.13}$$

où N est le nombre de sections de calcul du bief considéré. On cherche une relation de même type reliant l'amont et l'aval du bief C'est-à-dire $(\Delta Q_1, \Delta Z_1)$ et $(\Delta Q_N, \Delta Z_N)$.

5.1.3.1.1. 1ère méthode

La méthode la plus simple est de procéder par composition des relations 5.13 en reportant dans la relation liant $(\Delta Q_1, \Delta Z_1)$ et $(\Delta Q_2, \Delta Z_2)$ la relation qui relie $(\Delta Q_2, \Delta Z_2)$ et $(\Delta Q_3, \Delta Z_3)$. On obtient une relation reliant $(\Delta Q_1, \Delta Z_1)$ et $(\Delta Q_3, \Delta Z_3)$:

$$\begin{bmatrix}\Delta Q_1\\ \Delta Z_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}B_2 & A_2\\ C_2 & D_2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}B_3 & A_3\\ C_3 & D_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta Q_3\\ \Delta Z_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}B_2 & A_2\\ C_2 & D_2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}C_3\\ F_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}C_2\\ F_2\end{bmatrix} \tag{5.14}$$

Par récurrence on obtient la relation cherchée. Malheureusement, cette méthode n'est pas stable. Plus précisément à la fin du calcul l'égalité des cotes aux nœuds diffluents peut être très mal vérifiée et l'erreur a tendance à croître au cours des itérations en temps. De même la conservation des débits aux diffluences est assez mal assurée.

5.1.3.1.2. 2e méthode

L'idée pour résoudre le problème est la suivante : on sait que le double balayage est une procédure stable, on peut donc s'en inspirer pour construire une relation globale stable.

Le 1er balayage Amont ⟶ Aval est une procédure de transmission d'une information (la condition à la limite amont) qui est linéaire ; on peut donc dire que le résultat à l'aval est proportionnel à ce qui est injecté à l'amont.

À la fin du 1er balayage on obtient la relation d'impédance classique :

$$R_N{\cdot}\Delta Q_N + S_N{\cdot}\Delta Z_N = T_N \tag{5.15}$$

et on cherche une relation de la forme :

$$a{\cdot}\Delta Q_1 + \Delta Q_N + b{\cdot}\Delta Z_N = c \tag{5.16}$$

Or dans T_N on a la variation de ΔQ_1 ; plus précisément si on écrit la condition amont du bief sous la forme $\wedge Q_1 = \delta q$ et que l'on fait le 1er balayage en conservant explicitement δq on obtient une relation de la forme :

$$R_N{\cdot}\Delta Q_N + S_N{\cdot}\Delta Z_N = \frac{\delta q}{X} - T_N \tag{5.17}$$

où X est le produit de tous les facteurs de cadrage (cf. § 4.2.4.4) calculés successivement et T_N le 2e membre obtenu avec δq = 0.

Si on fait le calcul avec N = 3, on a les équations suivantes :

$$\begin{array}{lll}
(a) & \Delta Q_1 = \delta q & \text{Condition à la limite amont}\\
(b) & \Delta Z_1 - E_2{\cdot}\Delta Q_2 - D_2{\cdot}\Delta Z_2 = F_2 & \\
(c) & \Delta Q_1 - B_2{\cdot}\Delta Q_2 - A_2{\cdot}\Delta Z_2 = C_2 & \\
(d) & \Delta Z_2 - E_3{\cdot}\Delta Q_3 - D_3{\cdot}\Delta Z_3 = F_3 & \\
(e) & \Delta Q_2 - B_3{\cdot}\Delta Q_3 - A_3{\cdot}\Delta Z_3 = C_3 & \\
(f) & R_V{\cdot}\Delta Q_3 + S_V{\cdot}\Delta Z_3 = T_V & \text{Condition à la limite aval}
\end{array} \tag{5.18}$$

Le 1er balayage a pour but de triangulariser (supérieurement) la matrice de ce système linéaire. Pour cela il faut éliminer ΔQ_1 de (c) et ΔQ_2 de (e).

Soustrayant (c) à (a) on obtient :

$$(c') \qquad B_2{\cdot}\Delta Q_2 + A_2{\cdot}\Delta Z_2 = \delta q - C_2 \tag{5.19}$$

On pose $X_2 = Max(|B_2|,|A_2|)$ et on normalise (c ») :

$$(c'') \qquad \frac{B_2}{X_2}{\cdot}\Delta Q_2 + \frac{A_2}{X_2}{\cdot}\Delta Z_2 = \frac{\delta q}{X_2} - \frac{C_2}{X_2} \tag{5.20}$$

On pose $R_2 = \dfrac{B_2}{X_2}$, $S_2 = \dfrac{A_2}{X_2}$, $T_2 = \dfrac{\delta q - C_2}{X_2}$

On a maintenant le système :

$$\begin{array}{lrcl} (a) & \Delta Q_1 & = & \delta q \\ (b) & \Delta Z_1 - E_2 \cdot \Delta Q_2 - D_2 \cdot \Delta Z_2 & = & F_2 \\ (c'') & R_2 \cdot \Delta Q_2 + S_2 \cdot \Delta Z_2 & = & T_2 \\ (d) & \Delta Z_2 - E_3 \cdot \Delta Q_3 - D_3 \cdot \Delta Z_3 & = & F_3 \\ (e) & \Delta Q_2 - B_3 \cdot \Delta Q_3 - A_3 \cdot \Delta Z_3 & = & C_3 \\ (f) & R_V \cdot \Delta Q_3 + S_V \cdot \Delta Z_3 & = & T_V \end{array} \tag{5.21}$$

On multiplie (d) par S_2, (e) par R_2 on fait la somme et on enlève (C''), on obtient à la place de (e) :

$$(R_2 B_3 + S_2 E_3) \cdot \Delta Q_3 + (R_2 A_3 + S_2 D_3) \cdot \Delta Z_3 = T_2 - R_2 C_3 - S_2 F_3 \tag{5.22}$$

On pose : $X_3 = Max(|R_2 B_3 + S_2 D_3|, |R_2 A_3 + S_2 D_3|)$ et on normalise. On obtient (e ») :

$$(e') \quad R_3 \cdot \Delta Q_3 + S_3 \cdot \Delta Z_3 = \frac{T_2}{X_3} - \frac{(R_2 C_3 + S_2 F_3)}{X_3} \tag{5.23}$$

En développant T_2 on peut écrire :

$$\begin{aligned} (e') \quad R_3 \cdot \Delta Q_3 + S_3 \cdot \Delta Z_3 &= \frac{1}{X_3}\left(\frac{\delta q}{X_2} - \frac{C_2}{X_2}\right) - \frac{(R_2 C_3 + S_2 F_3)}{X_3} \\ &= \frac{\delta q}{X_2 X_3} - \frac{C_2}{X_2 X_3} - \frac{(R_2 C_3 + S_2 F_3)}{X_3} \end{aligned} \tag{5.24}$$

Finalement pour N quelconque on a bien une relation de la forme :

$$R_N \cdot \Delta Q_N + S_N \cdot \Delta Z_N = \frac{\delta q}{X} - T_N \tag{5.25}$$

En utilisant la condition à la limite amont on peut encore écrire :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{X} \cdot \Delta Q_1 + R_N \cdot \Delta Q_N + S_N \cdot \Delta Z_N &= -T_N \\ -\frac{1}{R_N X} \cdot \Delta Q_1 + \Delta Q_N + \frac{S_N}{R_N} \cdot \Delta Z_N &= -\frac{T_N}{R_N} \end{aligned} \tag{5.26}$$

Remarque : Quand N tend vers l'infini, X tend vers l'infini et le coefficient de ΔQ_1 tend donc vers 0 : c'est la déconnexion Amont – Aval.

On a obtenu une 1ère équation de condensation. Pour obtenir la 2e on procède de la même façon à partir de la condition à la limite aval ou de la R-S-T du 1er bief à l'aval de la maille obtenue par un 1er balayage Aval ⟶ Amont. Pour que cela soit possible, il faut réécrire les équations ((b), (c)) et ((d), (e)) de la façon suivante :

On a :

$$\begin{bmatrix} \Delta Q_1 \\ \Delta Z_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_2 & A_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta Q_2 \\ \Delta Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 \\ F_2 \end{bmatrix} \tag{5.27}$$

que l'on remplace (cf paragraphe sur le 1er balayage Aval ⟶ Amont) par :

$$-\begin{bmatrix} B_2 & A_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Delta Q_1 \\ \Delta Z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta Q_2 \\ \Delta Z_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} B_2 & A_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} C_2 \\ F_2 \end{bmatrix} \tag{5.28}$$

Tous calculs faits on obtient l'équation de condensation :

$$\frac{R_1}{S_1}\cdot\Delta Q_1+\Delta Z_1-\frac{1}{Y S_1}\cdot\Delta Z_N = \frac{T_1}{S_1} \tag{5.29}$$

où Y est le facteur de cadrage qui tend vers l'infini quand la longueur du bief croît.

Remarque :

Quand Y tend vers l'infini on obtient une équation où n'intervient plus ΔZ_N : c'est encore la déconnexion Amont – Aval.

5.1.3.2. Les équations aux nœuds

Il s'agit des équations qui expriment d'une part la conservation de la masse et d'autre part la conservation de la quantité de mouvement. La conservation de la masse se traduit pas un bilan de débit nul tenant compte de l'éventuel stockage au nœud si celui-ci joue le rôle d'un casier (nœud à surface non-nulle dans la nomenclature de MAGE). Comme on néglige les pertes de charge au passage des nœuds, la conservation de la quantité de mouvement se traduit par des relations d'égalité des cotes entre les sections adjacentes à un même nœud.

5.1.3.2.1. Nœuds de maille qui ne sont pas nœuds aval de maille

a) Égalité des cotes

Ce sont des relations de l'une des formes suivantes :

$$\Delta Z_{i,1} = \Delta Z_{k,1} \quad \text{(égalité amont - amont)}$$
$$\Delta Z_{i,N} = \Delta Z_{k,N} \quad \text{(égalité aval - aval)}$$
$$\Delta Z_{i,1} = \Delta Z_{k,N} \quad \text{(égalité amont - aval)}$$

où i et k désignent des biefs reliés au même nœud et 1 et N sont les numéros des sections du bief adjacentes au nœud. $\Delta Z_{i,1}$ désigne ainsi la section amont du bief i. S'il y a K biefs reliés au même nœud n, on obtient ainsi K-1 relations. On peut toujours exclure les relations du type (aval-aval) pour ne conserver que les relations (amont-aval) et (amont-amont).

b) Continuité des débits

On utilise les notations suivantes :

- Aire : surface de nœud (casier).
- Indice 0 : biefs n'appartenant pas à la maille qui arrive sur le nœud : on connait les R-S-T. obtenues par 1er balayage.
- Indice 1 : bief appartenant à la maille partant du nœud
- Indice n : bief appartenant à la maille arrivant au nœud
- Indice a : apport ponctuel

On a en utilisant l'égalité des cotes au nœud :

$$\sum \Delta Q_0 = \sum \frac{T_0}{R_0} - \Delta Z_1\cdot\sum \frac{S_0}{R_0} \tag{5.30}$$

La conservation des débits à travers le nœud s'écrit d'autre part :

$$\underbrace{\Delta Q_a + \sum(Q_n+\Delta Q_n) + \sum(Q_0+\Delta Q_0)}_{\text{ce qui entre}} - \underbrace{\sum(Q_1+\Delta Q_1)}_{\text{ce qui sort}} = \underbrace{\frac{Aire}{\Delta t}\cdot\Delta Z_1}_{\text{ce qui reste}} \tag{5.31}$$

Ce qu'on peut récrire sous la forme :

$$\sum \Delta Q_1 - \sum \Delta Q_n + \left(\frac{Aire}{\Delta t} + \sum \frac{S_0}{R_0}\right) \cdot \Delta Z_1 = -\sum Q_1 + \sum Q_n + \sum Q_0 + \sum \frac{T_0}{R_0} + Q_a \tag{5.32}$$

5.1.3.2.2. Nœuds aval de maille

Il s'agit là de prendre en compte les conditions aux limites.

a) loi Z(t) (limnigramme) ; on a immédiatement :

$$\Delta Z_{k,N} = \delta Z \text{ donné} \tag{5.33}$$

b) loi Q(Z) (loi de tarage) ; la loi est linéarisée sous la forme :

$$R \cdot \Delta Q_{k,N} + S \cdot \Delta Z_{k,N} = T \tag{5.34}$$

(En fait on fait une itération de type Newton-Raphson, ce qui permet de réactualiser la loi linéarisée à chaque itération).

Remarque : On fait l'hypothèse que chaque condition à la limite aval est portée par un seul bief et qu'il n'y a ni apport ni casier (nœud à surface non nulle) à l'endroit des conditions aux limites.

5.1.3.3. Résolution du système

En ajoutant aux équations de condensation les équations aux nœuds de maille, on obtient le système suivant :

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{M} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{K} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{L} \\ \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{N} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{H} & \boldsymbol{I} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \Delta Q_1 \\ \Delta Q_N \\ \Delta Z_1 \\ \Delta Z_N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 \\ C_4 \\ C_2 \\ C_3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Continuité des débits aux noeuds non aval de maille ; égalité des cotes amont-amont} \\ \text{Condensation (2)} \\ \text{Condensation (1)} \\ \text{Loi aval et égalité des cotes amont-aval aux nœuds non aval de maille} \end{array} \tag{5.35}$$

K, **L**, **Q**, **F** et **N** sont des matrices diagonales, **I** est l'identité et **O** est la matrice nulle, **H** est triangulaire supérieure avec diagonale nulle.

Comme on l'a déjà dit, seuls les ΔQ_1 nous intéressent pour descendre le 1er balayage dans la maille. On se ramène donc à un système en ΔQ_1 seul ce qui permet en plus de réduire la taille du système linéaire à résoudre d'un facteur 4 et ainsi de diminuer le temps de calcul nécessaire.

On a :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \Delta Q_1 + \boldsymbol{H} \cdot \Delta Z_1 + \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{F} \cdot \Delta Z_N &= \boldsymbol{H} \cdot C_2 \\ \boldsymbol{N} \cdot \Delta Q_1 + \boldsymbol{H} \cdot \Delta Z_1 + \boldsymbol{I} \cdot \Delta Z_N &= C_3 \end{aligned} \tag{5.36}$$

Soit en soustrayant :

$$(\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{N}) \cdot \Delta Q_1 + (\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}) \cdot \Delta Z_N = \boldsymbol{H} \cdot C_2 - C_3 \tag{5.37}$$

Or la matrice (**H.F-I**) est inversible. En effet le classement des biefs fait par TALWEG [Ref biblio] permet d'obtenir que **H** soit une matrice triangulaire supérieure à diagonale nulle. Comme **F** est diagonale, **H.F** est encore triangulaire supérieure à diagonale nulle. Finalement **H.F-I** est triangulaire supérieure à diagonale unité ; en particulier **H.F-I** est inversible et son inverse se calcule facilement par la méthode de Gauss-Jordan.

On obtient donc en divisant par **H.F-I** à gauche :

$$(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{F}-\boldsymbol{I})^{-1}\cdot(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{N})\cdot\Delta Q_1 \ + \ \Delta Z_N \ = \ (\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{F}-\boldsymbol{I})^{-1}\cdot(\boldsymbol{H}\cdot C_2-C_3) \tag{5.38}$$

d'autre part en multipliant la 2e équation matricielle par **A**, la 3e par **B** et en soustrayant à la 1ère, on obtient :

$$(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{K}-\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{Q})\cdot\Delta Q_1 \ - \ (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{L}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{F})\cdot\Delta Z_N \ = \ C_1-\boldsymbol{A}\cdot C_4-\boldsymbol{B}\cdot C_2 \tag{5.39}$$

On a donc maintenant les 2 équations suivantes :

$$\begin{cases}(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{F}-\boldsymbol{I})^{-1}\cdot(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{N})\cdot\Delta Q_1 \ + \ \Delta Z_N \ = \ (\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{F}-\boldsymbol{I})^{-1}\cdot(\boldsymbol{H}\cdot C_2-C_3) \\ (\boldsymbol{M}-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{K}-\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{Q})\cdot\Delta Q_1 \ - \ (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{L}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{F})\cdot\Delta Z_N \ = \ C_1-\boldsymbol{A}\cdot C_4-\boldsymbol{B}\cdot C_2\end{cases} \tag{5.40}$$

entre lesquelles on va éliminer ΔZ_N en multipliant la première par (**A.L+B.F**) à gauche et en ajoutant le résultat à la seconde, on obtient alors le système :

$$\boldsymbol{W}\cdot\Delta Q_1 \ = \ Y$$

avec

$$\begin{cases}\boldsymbol{W}=\left[(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{K}-\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{Q})+(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{L}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{F})\cdot(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{F}-\boldsymbol{I})^{-1}\cdot(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{N})\right] \\ Y=C_1-\boldsymbol{A}\cdot C_4-\boldsymbol{B}\cdot C_2+(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{L}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{F})\cdot(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{F}-\boldsymbol{I})^{-1}\cdot(\boldsymbol{H}\cdot C_2-C_3)\end{cases} \tag{5.41}$$

Ce système doit être résolu à part ; la matrice **W** est une matrice pleine que l'on peut décomposer en parties triangulaires inférieure (**L**) et supérieure (**U**) par la méthode de Gauss. La méthode de Newton-Raphson dégénérée utilisée dans MAGE conduit à résoudre à chaque itération ce même système pour des seconds membres différents. Il est donc intéressant de stocker la décomposition **LU** de **W ;** le gain en temps de calcul est important. Des tests dans le cas d'un réseau maillé complexe comme celui des Wateringues (1.3) ont montré que près de 90 % du temps CPU total est consommé dans la construction et la résolution du système (5.41) $\boldsymbol{W}\cdot\Delta Q_1 \ = \ Y$.

5.2. Cas de la méthode ISM

Pour l'instant la méthode ISM n'est applicable que sur un réseau constitué d'un seul bief. La généralisation à un réseau ramifié puis à un réseau maillé est en cours de développement.

6. Prise en compte des ouvrages hydrauliques

6.1. Introduction

Lorsque des ouvrages hydrauliques (déversoirs, vannes, pompes…) sont présents sur le réseau, les équations de Saint-Venant ne sont localement plus applicables.

On distingue deux type d'ouvrages, ceux qui génèrent une perte de charge comme les seuils et les vannes, et ceux qui génèrent une perte de débit comme les pompes et les déversoirs latéraux. L'ouvrage est décrit par deux équations raccordant les équations de Saint-Venant à son amont et à son aval.

Dans le cas d'un ouvrage générant une perte de charge, ces équations sont une équation de conservation de la masse et une équation de conservation de l'énergie données sous la forme :

$$\begin{cases} Q_i = Q_{i+1} \\ f\left(Q_i, Z_i, Z_{i+1}, w\right) = 0 \end{cases} \tag{6.1}$$

où w est une fonction représentant la commande de l'ouvrage.

Dans le cas d'un ouvrage générant une perte (ou un gain) de débit, on considère qu'il n'y a pas de perte d'énergie et les équations sont donc de la forme :

$$\begin{cases} Q_{i+1} = Q_i - \delta q(Q_i, Z_i, Z_{i+1}) & \text{où } \delta q \text{ est le débit prélevé} \\ Z_{i+1} = Z_i \end{cases} \tag{6.2}$$

Ces équations sont alors discrétisées puis intercalées dans le système d'équations. Après linéarisation, le système garde sa forme générale et la résolution se fait comme décrite précédemment.

Les lois utilisées dépendent de l'ouvrage et du régime d'écoulement sur l'ouvrage (noyé, dénoyé, en charge). Dans la littérature on trouve différentes lois pour décrire le même écoulement sur un ouvrage [Réf biblio]. On trouvera au chapitre 9.17 le détail des lois de débit pour chaque type d'ouvrage disponible dans MAGE.

Dans MAGE on peut construire des ouvrages composites en ajoutant en parallèle plusieurs ouvrages élémentaires de même type (perte de charge ou perte de débit). La loi de comportement de l'ouvrage composite est la somme des lois de comportement des ouvrages élémentaires qui le constituent.

6.2. Discrétisation des équations d'ouvrage

On décrit ici le traitement des ouvrages qui génèrent une perte de charge. Les ouvrages qui génèrent une variation de débit ont un comportement déjà linéraire.

6.2.1. Linéarisation

Cette étape correspond à la discrétisation des équations de Saint-Venant par le schéma de Preissmann. La forme générale des équations continues est donc :

$$\begin{cases} Q_i = Q_{i+1} & \text{(Conservation de la masse)} \\ f\left(Q_i, Z_i, Z_{i+1}, w\right) = 0 & \text{(Perte de charge)} \end{cases} \tag{6.3}$$

La question est de savoir comment procéder pour discrétiser ces équations sous une forme analogue à celle utilisée pour les équations de *Saint-Venant*, à savoir :

$$\begin{cases} EC\left(\Delta Q_i, \Delta Z_i, \Delta Q_{i+1}, \Delta Z_{i+1}\right) = C\left(Q_i^n, Z_i^n, Q_{i+1}^n, Z_{i+1}^n\right) & \text{(Continuité)} \\ ED\left(\Delta Q_i, \Delta Z_i, \Delta Q_{i+1}, \Delta Z_{i+1}\right) = D\left(Q_i^n, Z_i^n, Q_{i+1}^n, Z_{i+1}^n\right) & \text{(Dynamique)} \end{cases} \tag{6.4}$$

Pour l'équation de continuité on écrit :

$$\Delta Q_i - \Delta Q_{i+1} = Q_{i+1}^n - Q_i^n \tag{6.5}$$

L'équation de perte de charge est en fait de la forme :

$$Q = f\left(Z_{amont}, Z_{aval}, w\right) \tag{6.6}$$

où Z_{amont} et Z_{aval} représentent les cotes de l'eau en des sections suffisamment éloignées de l'ouvrage, sachant qu'on ne se préoccupe pas du détail de l'allure de la ligne d'eau entre ces deux sections.
L'équation non-linéaire à résoudre est donc :

$$\Delta Q_{i+1} - f\left(Z_i^n + \Delta Z_i, Z_{i+1}^n + \Delta Z_{i+1}, w\right) = -Q_{i+1}^n \tag{6.7}$$

On peut donc écrire, avec un simple développement limité au premier ordre :

$$\begin{aligned} &Q_{i+1}^n + \Delta Q_{i+1} = f\left(Z_i^n, Z_{i+1}^n, w\right) + \partial_1 f\left(Z_i^n, Z_{i+1}^n, w\right) \cdot \Delta Z_i + \partial_2 f\left(Z_i^n, Z_{i+1}^n, w\right) \cdot \Delta Z_{i+1} \\ &\text{soit :} \\ &\Delta Q_{i+1} - \partial_1 f\left(Z_i^n, Z_{i+1}^n, w\right) \cdot \Delta Z_i - \partial_2 f\left(Z_i^n, Z_{i+1}^n, w\right) \cdot \Delta Z_{i+1} = f\left(Z_i^n, Z_{i+1}^n, w\right) - Q_{i+1}^n \end{aligned} \tag{6.8}$$

On a donc ainsi obtenu des équations discrètes de formes analogues à celles obtenues pour Saint-Venant.

6.2.2. Équations de correction

On se place dans le cadre du processus itératif de type Newton-Raphson dégénéré décrit au chapitre 4.2.

Pour l'équation dynamique le terme correctif qu'il faut ajouter au second membre de l'itération précédente est donné par :

$$\begin{aligned} &-Q_{i+1}^n - \Delta Q_{i+1} + f\left(Z_i^n + \Delta Z_i, Z_{i+1}^n + \Delta Z_{i+1}, w\right) \\ &\text{soit :} \\ &f\left(Z_i^n + \Delta Z_i, Z_{i+1}^n + \Delta Z_{i+1}, w\right) - \Delta Q_{i+1} - f\left(Z_i^n, Z_{i+1}^n, w\right) \end{aligned} \tag{6.9}$$

en admettant que l'équation a été correctement résolue au pas de temps précédent et donc que :

$$Q_{i+1}^n = f\left(Z_i^n, Z_{i+1}^n, w\right) \tag{6.10}$$

L'équation de continuité quant à elle est linéaire homogène donc son terme correctif dans l'itération de Newton-Raphson est en principe nul. En pratique on utilise $\Delta Q_i - \Delta Q_{i+1}$ de l'estimation précédente ce qui assure une meilleure convergence.

7. Modélisation du transport solide par charriage

À l'origine il était prévu d'implémenter le charriage dans AdisTS à coté du transport de particules fines en suspension. À l'étude il s'est avéré qu'il serait plus pratique de modéliser le charriage dans le code de calculs hydrauliques (Mage) plutôt que dans le code de transport en suspension (AdisTS). Les raisons qui ont conduit à ce changement de stratégie sont les suivantes :

- il faut pouvoir faire du charriage sans transport en suspension et on ne peut pas faire tourner AdisTS sans au moins une concentration à transporter ;
- le travail sur le couplage fort AdisTS – Mage a montré que le couplage entre l'hydraulique et l'évolution de la géométrie est plus facile à gérer à l'intérieur du même code de calcul que entre 2 codes qui doivent calculer en parallèle ;
- l'implémentation de la structure de données dans AdisTS n'est pas satisfaisante parce qu'elle a une empreinte mémoire trop importante dans les cas sans charriage puisqu'elle réserve la place nécessaire aux données de charriage absentes.

Il a donc été décidé d'implémenter le module de charriage dans Mage-8. Pour cela la structure de données qui avait été implémentée dans AdisTS pour représenter les couches sédimentaires a été transférée dans Mage et largement modifiée. Un des objectifs était de ne pas avoir à gérer des données vides quand ces données n'existent pas. Il a été possible et relativement facile d'atteindre cet objectif en utilisant les facultés de programmation orientée objet introduites dans les normes récentes du langage Fortran.

Actuellement nous avons ainsi une version de Mage-8 qui dispose des fonctionnalités supplémentaires suivantes :

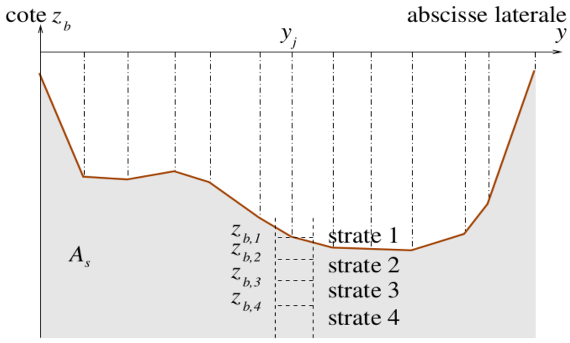


Figure 11: profil en travers avec strates sédimentaires

- chaque profil en travers peut être enrichi de plusieurs couches sédimentaires (Figure 11) définies par leur cote plancher, leur granulométrie[1] d_{50}, leur étendue granulométrique $\sigma = \sqrt{d_{84}/d_{16}}$ et une contrainte de mise en mouvement ; Ces couches peuvent être définies aux points (x,y,z) ou globalement sur une section.
- les données des couches sédimentaires peuvent être définies de 2 façons différentes :
  - soit point par point : dans ce cas les fichiers de géométrie au format ST sont complétés sur chaque ligne pour donner, en plus des coordonnées (x,y,z) du point, la liste de ses couches sédimentaires ;
  - soit par tronçons : dans ce cas les couches sédimentaires sont définies par leur épaisseur, de façon globale sur les sections de ce tronçon. Pour les secteurs où on ne veut pas définir de tronçon, on définit une couche sédimentaire par défaut ;
  - soit par section : dans ce cas les fichiers de géométrie au format ST sont complétés sur la ligne de définition de la section pour donner, en plus, la liste de ses couches sédimentaires.
- Cette triple méthode de définition permet, grâce à une fonction d'export de la géométrie au format ST étendu (points (x,y,z) ou sections + couches sédimentaires) d'initialiser confortablement une simulation (donnée par tronçons) et de faire une reprise à partir d'un état final ou intermédiaire (donnée point par point ou par sections).
- Une option de la ligne de commande permet à l'utilisateur de choisir le mode de prise en compte du charriage qu'il souhaite : pas de charriage (valeur par défaut), charriage à partir de données point par point, charriage à partir de données par tronçon et charriage à partir de données sur la section. Cela fonctionne sans que l'utilisateur ait besoin de modifier ses fichiers de données, les données inutiles sont ignorées et s'il manque des données il y a un message d'erreur bloquante.

1 d_x désigne le diamètre de grain tel que x % de la masse de sédiment à un diamètre inférieur à d_x.

7.1. Implémentation du bilan sédimentaire

Notre implémentation du bilan sédimentaire se base sur les travaux de thèses réalisés précédemment à Irstea, principalement la thèse de Pierre Balayn (2001) et la thèse de Kamal Elkadi Abderrezzak (2006).

Du point de vue du charriage un tronçon de rivière est modélisé comme une succession de compartiments sédimentaires. Chaque compartiment est décrit par sa masse (M), son diamètre médian (d_{50}) et son étendue granulométrique (σ). Il est centré sur un profil, donc construit avec la demie maille amont et la demie maille aval du profil.

Le bilan sédimentaire sert à mettre à jour, sous l'action de l'écoulement, les caractéristiques de la couche sédimentaire active (la plus haute), c'est-à-dire sa masse et sa composition. Le bilan sédimentaire est réalisé selon la méthode décrite dans la thèse de Pierre Balayn et résumé dans le schéma ci-dessous :

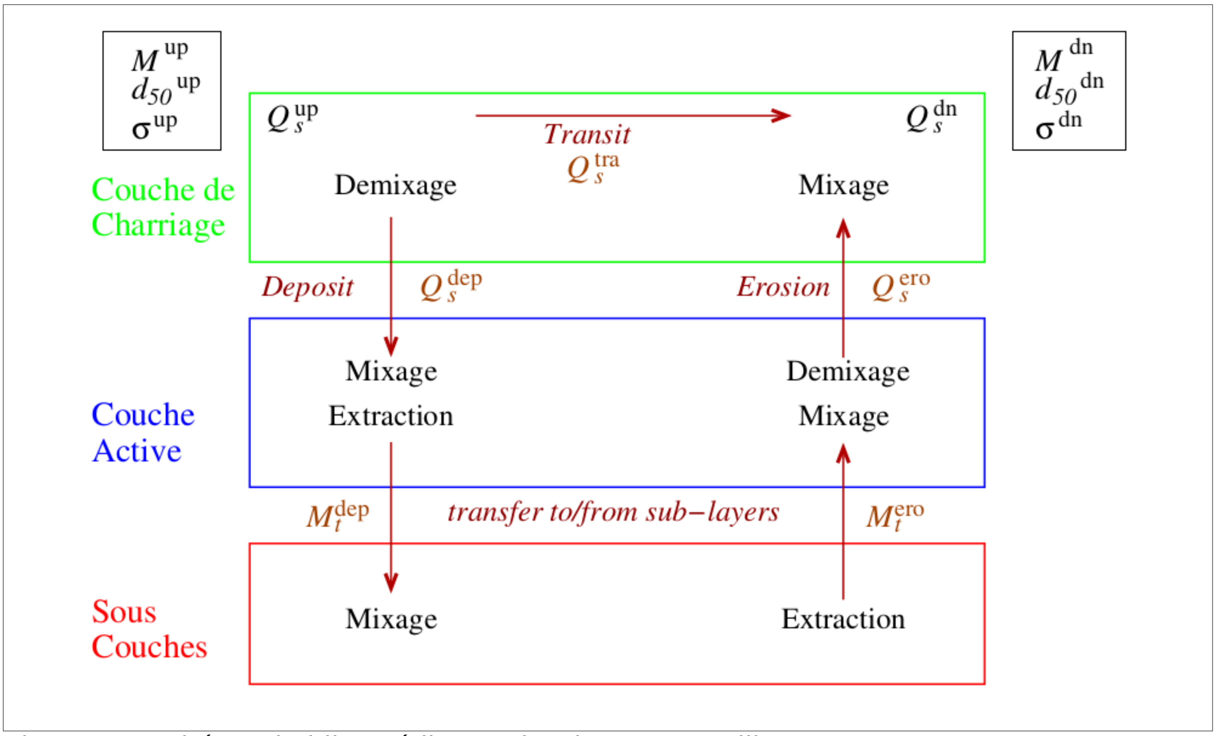


Figure 12: Schéma du bilan sédimentaire dans une maille

L'opération de mixage permet de construire un compartiment sédimentaire résultant du mélange de 2 compartiments sédimentaires de caractéristiques différentes.

L'opération de démixage permet d'extraire un compartiment sédimentaire d'un autre de façon que cette opération soit la réciproque de l'opération de mixage. Si on mixe le compartiment extrait avec le compartiment résiduel, on retrouve le compartiment initial.

Le bilan sédimentaire est réalisé sous-section par sous-section (lit mineur et lits majeurs gauche et droit). Généralement le transport par charriage ne concerne en fait que le lit mineur, voir cependant la notion de largeur active.

Les lois de capacité solide actuellement implémentées sont :

- Meyer-Peter & Müller : $q_s = 8\sqrt{(s-1)gd_{50}^3}(\theta_{eff}-\theta_{cr})^{1,5}$
- Engelund et Hansen : $q_s = \dfrac{0{,}05 K_f R_h^{1/6}}{(\rho_s-\rho)^2 \rho^2 d_{50} g^{5/2}} \tau_f^2 U$
- Camenen & Larson : $q_s = 12\sqrt{(s-1)gd_{50}^3}\,\theta_{eff}^{1,5} \exp\left(-4{,}5\dfrac{\theta_{cr}}{\theta_{eff}}\right)$

Ici $s = \dfrac{\rho_s}{\rho}$ avec ρ_s la masse volumique du sédiment (2650 kg/m³ par défaut) et ρ la masse volumique de l'eau, est la densité du sédiment.

Le bilan sédimentaire dépend de la distance de chargement définie par la formule de Han :

$$L = \alpha_{Han} \frac{u_*}{W_s} \tag{7.1}$$

où u_* est la vitesse de frottement, W_s est la vitesse de chute et α_{Han} un coefficient à choisir qui a la dimension d'une distance. La vitesse de chute d'un grain de diamètre d est calculée selon la formule de Soulsby & Whitehouse (1997) :

$$W_s = \frac{\nu}{d}\left(\sqrt{10{,}36^2 + 1{,}049 \cdot d_*^3} - 10{,}36\right) \tag{7.2}$$

avec ν la viscosité cimatique de l'eau à 18°C (10^{-6} m²/s) et d_* le diamètre sédimentologique défini par :

$$d_* = \left(\frac{\left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right) g}{\nu^2}\right)^{1/3} d \tag{7.3}$$

7.2. Notion de largeur active

Comme dans RubarBE, l'utilisateur de Mage-8 peut définir une largeur active qui lui permet de limiter pour chaque profil les points sur lesquels le charriage peut agir. Cette largeur active est définie à l'aide de 2 lignes directrices que le modélisateur choisit comme il veut. Seuls les points des profils situés entre ces 2 lignes directrices sont affectés par le charriage. Si de telles lignes directrices ne sont pas définies, alors les profils entiers sont affectés par le charriage.

NB : les deux lignes directrices ne sont pas nécessairement situées dans le lit mineur, même si c'est le cas le plus fréquent. Dans tous les cas c'est à l'utilisateur de décider.

7.3. Méthode de modification de la géométrie sous l'effet du charriage

Une fois le bilan sédimentaire réalisé, il faut traduire l'évolution de la masse du sédiment qui constitue la couche active en évolution géométrique et donc en déformation des profils en travers qui décrivent la forme du lit de la rivière.

Plusieurs méthodes de calcul de cette déformation existent et sont implémentées dans le code RubarBE depuis la thèse de Kamal Elkadi Abderrezzak. Pour l'instant Mage-8 ne dispose que la méthode « naïve » qui consiste à convertir la variation de masse de la couche active en variation d'épaisseur. Ensuite cette variation d'épaisseur d'épaisseur, positive ou négative, est ajoutée à la cote du fond de chaque point de la largeur active situé sous la surface de l'eau.

7.4. Mise en œuvre pratique du charriage

Pour construire un modèle numérique avec charriage, l'utilisateur doit :

- ajouter des couches sédimentaires à la géométrie de la rivière ; en général on commence avec des couches définies par tronçons, c'est-à-dire en définissant un fichier SED ;
- ajouter des conditions aux limites solides, c'est-à-dire les débits solides entrant dans le système (fichier QSO) ;
- enfin en paramétrant le transport solide à l'aide du fichier CHA.

Bien entendu il faut utiliser la bonne option de la ligne de commande (option -c) pour activer le module de charriage.

Partie 2.
Mise en œuvre pratique

8. Pour commencer : les étapes de la construction d’un modèle

On décrit dans ce chapitre la méthode générale pour construire un modèle numérique avec le code de calcul MAGE. Par modèle numérique on entend ici l’ensemble des (fichiers de) données nécessaires au code de calcul choisi.

8.1. Étape n°1 : identification des écoulements et des chemins d’eau

Il faut commencer par définir la topologie des écoulements sous la forme d’un graphe avec des points d’entrée, des confluents, des diffluences, des zones de stockage et des points de sortie.

Il est important de se souvenir ici que l’utilisation d’un code de calcul mono-dimensionnel implique forcément une connaissance a priori du lieu et de la direction des écoulements. Contrairement à un code 2D, un code 1D ne peut pas découvrir des directions d’écoulement ou des chemins d’eau, aussi un chemin d’eau qui n’aurait pas été modélisé par un bief avec MAGE serait comme s’il n’existait pas.

Cette identification des écoulements se fait à l’aide des données cartographiques et topographiques ainsi qu’avec la connaissance du terrain que peut avoir le modélisateur.

À la fin de ce travail le modélisateur dispose d’un graphe complet du réseau à modéliser avec la localisation des conditions aux limites amont et aval.

8.2. Étape n°2 : identification des structures de contrôle hydrauliques

Les structures de contrôle hydraulique sont en général des structures dont la taille est faible devant celle du réseau mais dont l’effet est important, bien souvent en forçant l’écoulement en dehors des voies traditionnelles des écoulements à surface libre régis par les équations de Saint-Venant. Il faut ainsi identifier les ponts, les ouvrages hydrauliques (seuils, déversoirs, vannes, passages busés, etc.), les digues, les épis, etc.

Une fois ces structures identifiées, le modélisateur doit faire appel à son expertise d’hydraulicien pour décider dans quelle mesure il a besoin de les prendre en compte dans son modèle numérique. Cette décision va se baser sur des considérations de régime hydraulique selon les objectifs assignés au modèle numérique à construire, par exemple selon que le modèle est destiné à simuler des étiages, des crues faibles ou des crues importantes.

8.3. Étape n°3 : construction du modèle géométrique

Les données topographiques et bathymétriques sont utilisées pour construire le fichier NET qui décrit le réseau (informations topologiques : architecture du réseau hydrographique modélisé) et les fichiers ST de géométrie (profils en travers). À ces données purement géométriques, il faut ajouter la définition de la séparation entre lit mineur et lit moyen. Dans MAGE cela se fait par la définition optionnelle de lignes directrices RG et RD (rive gauche & rive droite) qui donnent, pour chaque profil en travers, la limite gauche et la limite droite du lit mineur.

Les données sur les chenaux d’écoulement, doivent être complétées, en tant que de besoin, par la modélisation géométrique des zones de stockage (casiers) qui se fait sous la forme de relations donnant la surface horizontale du casier en fonction de la profondeur (plus précisément l’altitude).

Il faut ensuite définir le maillage, c’est-à-dire l’ensemble des points de calcul utilisés par MAGE. Ces points de calcul sont les profils en travers fournis par l’utilisateur auxquels sont ajoutés des profils interpolés selon un pas d’espace adapté aux contraintes numériques du calcul. En effet s’il est en général suffisant de faire des levés topographiques et bathymétriques aux limites des tronçons géométriquement homogènes, il faut un pas d’espace suffisamment petit pour le calcul (souvent de l’ordre de 100 mètres dans une rivière tranquille à la géométrie régulière). La valeur de ce pas d’espace de calcul relève de l’expertise de l’utilisateur. Elle dépend de l’irrégularité de la géométrie, de la pente, de la vitesse de l’écoulement et de la dynamique de l’événement hydrologique à simuler.

Le maillage peut être construit depuis un environnement de modélisation hydraulique comme PamHyr (application de pré-post processing), ce qui a l’avantage, parmi d’autres, de pouvoir facilement contrôler visuellement le résultat de l’opération de maillage. Dans ce cas PamHyr fournit à MAGE une géométrie suffisamment détaillée qui n’a pas besoin d’être maillée plus finement.

À défaut d’utilisation d’un environnement de modélisation hydraulique, il faut utiliser un programme de maillage tel que celui qui est piloté par PamHyr.

8.4. Étape n°4 : modélisation des ouvrages et structures hydrauliques

Tous les ouvrages qui ont une influence sur l’écoulement – dans la gamme de régimes considérée – doivent être modélisés d’une façon ou d’un autre. La plupart du temps ces ouvrages n’entrent pas dans le cadre des équations de Saint-Venant, il faut donc des lois hydrauliques spécifiques. C’est l’objet des lois de seuil, vanne, orifice, etc. Ces lois d’ouvrage sont mises en œuvre par le modélisateur par l’intermédiaire des fichiers SIN, DEV et VAR.

Le fichier SIN concerne uniquement les ouvrages en travers (déversoirs, vannes, ponts, orifices, etc.) et les déversoirs latéraux courts.

Le fichier DEV sert à modéliser les déversements latéraux par-dessus les berges (au-delà du lit moyen) ou par-dessus une digue. Un déversement latéral peut alimenter un autre bief ou un casier.

C’est en particulier à l’aide des fichiers SIN et DEV qu’on va pouvoir modéliser un système à casier, en définissant des liaisons hydrauliques de bief à casier et entre casiers (par exemple liaisons de type Strickler ou déversoir dans un bief de jonction plus ou moins simplifié).

Le fichier VAR est utilisé pour définir les règles de régulation des ouvrages mobiles s’il y en a. Plusieurs lois sont disponibles et décrites au chapitre 9.18.

8.5. Étape n°5 : rugosités et résistance à l’écoulement

La définition précise des paramètres de résistance à l’écoulement (coefficients de rugosité et coefficients de débit des ouvrages) relève de l’opération de calage du modèle (ajustement des paramètres pour reproduire au mieux les observations telles que les laisses de crues et les niveaux enregistrés).

Cependant pour construire la première ébauche du modèle numérique il est nécessaire de pouvoir réaliser des simulations afin de découvrir d’éventuelles erreurs de modélisation et s’assurer de sa robustesse. Il faut donc définir un premier jeu de paramètres de résistance à l’écoulement. Pour cela une bonne méthode, qui anticipe un peu sur le calage, consiste à commencer par identifier des secteurs de rugosité homogène. Cela se fait par l’observation sur le terrain. Ensuite on peut affecter à chaque tronçon un jeu de coefficients de Strickler (un pour le lit mineur et un autre pour chacun des lits majeurs actifs), en s’aidant par exemple de tables qui donnent des valeurs de coefficient de Strickler (ou plus souvent Manning) en fonction de la taille des cailloux, de la granulométrie et du type de végétation.

Ces données (tronçons et valeurs des coefficients de Strickler) sont rassemblées dans le fichier RUG.

Pour les coefficients de débits des ouvrages, il s’agit du fichier SIN. Le plus souvent les valeurs par défaut fournissent une bonne base de départ.

8.6. Étape n°6 : définition des conditions aux limites aval

Pour chaque sortie du réseau il faut définir une condition à la limite aval. MAGE donne deux possibilités, soit fournir une courbe de tarage (relation hauteur – débit) soit un limnigramme (niveau fonction du temps). Les courbes de tarages se définissent dans le fichier AVA tandis que les limnigrammes se définissent dans le fichier LIM. Un marégramme est un limnigramme et comme tel doit être défini dans LIM.

Le choix entre loi de tarage et limnigramme repose sur l'expertise du modélisateur. Toutefois le limnigramme comme l'hydrogramme impose une dynamique temporelle à l'écoulement ; il est donc important, si le modélisateur choisit des limnigrammes, que ceux-ci soient compatibles avec les hydrogrammes imposés aux entrées amont du modèle. En gros il faut que le décalage entre l'amont et l'aval soit le bon. S'assurer d'une telle compatibilité est délicat, surtout quand il s'agit de simuler des événements hydrologiques non observés. C'est pourquoi on préfère le plus souvent utiliser une courbe de tarage en plaçant les conditions aux limites aval en des endroits où on dispose d'une station de mesure. Si cela n'est pas possible, on peut toujours prolonger le modèle vers l'aval, assez loin au-delà de la zone d'intérêt, et utiliser une courbe de tarage en régime uniforme. Si la condition à la limite aval est assez éloignée de la zone d'intérêt elle n'aura pas d'influence sur celle-ci. Une courbe de tarage en régime uniforme peut être fournie automatiquement par PamHyr (ce qui permet d'en voir le graphe) ou laissée à calculer par MAGE, pour cela il suffit de ne pas fournir de condition à la limite au nœud correspondant (ni dans LIM ni dans AVA).

8.7. Étape n°7 : définition des apports en volume

Les apports en volume sont de trois types :
- Les conditions aux limites amont : il est nécessaire de fournir un hydrogramme en chaque nœud amont (chaque entrée) du modèle.
- Les apports ponctuels sur les nœuds intérieurs du modèle, c'est-à-dire ceux qui ne sont ni une condition à la limite amont ni une condition à la limite aval. On peut fournir un hydrogramme par nœud qui viendra s'ajouter au bilan entrée – sortie du nœud. On peut ainsi modéliser les apports d'un ou plusieurs (en les regroupant) affluents qu'on ne souhaite pas prendre en compte dans la géométrie du réseau.
- Les apports répartis (ou latéraux ou diffus) qui sont traités différemment par le code parce qu'ils apparaissent comme des termes sources dans les équations de Saint-Venant. Les apports latéraux peuvent servir à modéliser un débit de ruissellement ou d'infiltration (débit négatif alors puisque les apports sont comptés positivement) ou encore une pluie directe qui arrivent de façon (considérée comme) homogène le long d'un tronçon de la rivière.

Les apports ponctuels (y compris les conditions aux limites amont) sont définis dans le fichier HYD tandis que les apports latéraux sont définis dans le fichier LAT.

Bien entendu la définition même des hydrogrammes (ponctuels ou diffus) dépend de considérations hydrologiques qui doivent faire l'objet d'une étude hydrologique préalable à l'étude hydraulique. Mais ceci est une autre histoire.

8.8. Étape n°8 : définition d'un état initial et première simulation

Arrivé ici il ne reste plus que la définition de l'état initial et des paramètres numériques de la simulation. L'état initial se définit avec le fichier INI (voir les conseils d'utilisation sur ce point qui peut être assez délicat) tandis que les paramètres numériques (dates de début et de fin de la simulation, pas de temps, etc.) sont définis dans le fichier NUM.

Il n'est pas rare que la première simulation lancée sur un nouveau modèle échoue par divergence des itérations ou non convergence. Cela est en général dû à des erreurs dans les données ou à un mauvais choix de paramètres. Il faut alors utiliser les informations fournies par les fichiers de résultats (TRA, ERR, output) et les sorties graphiques (dans PamHyr) pour trouver une solution et corriger le problème jusqu'à obtenir un modèle numérique robuste dont les simulations fonctionnent sans difficultés même quand on fait varier un peu les paramètres et données. La robustesse du modèle est ainsi le gage de la facilité de son exploitation pour les objectifs qui lui sont assignés par le modélisateur.

8.9. Étape n°9 : calage du modèle

Une fois que l'on dispose d'un modèle suffisamment robuste on peut tenter de le calibrer sur les données observées (laisses de crue, enregistrement de limnigrammes, photos aériennes de champs d'inondation, etc.). Pour l'essentiel le calage consiste à régler les coefficients de strickler et de débit pour ajuster les résultats sur les observations.

Dans la mesure du possible, on s'efforcera de valider le modèle sur un jeu d'observations non utilisé pour le calage.

Le site INRAE de Lyon a encadré un travail de recherche qui présente une bonne synthèse des techniques de calage (Thèse de doctorat de Jean-Philippe Vidal soutenue en 2005 : *https://theses.fr/2005INPT010H*).

8.10. Étape n°10 : exploitation du modèle

Une fois obtenu un modèle numérique robuste, calé et validé, on peut enfin s'en servir pour réaliser les simulations prévues. Malgré tout il faut rester vigilant et vérifier systématiquement la qualité des résultats obtenus (voir les conseils d'utilisation sur ce point). Cela se fait à partir des fichiers de sortie texte TRA, ERR et output.

Pour l'extraction des résultats proprement dit, on utilise de préférence un outil comme PamHyr mais cela peut se faire aussi en ligne de commande en utilisant le programme auxiliaire Mage_Extraire (il suffit de répondre aux questions).

9. Formats des fichiers

Sauf mention contraire, toute ligne d'un fichier de données de MAGE commençant par une étoile (*) est un commentaire ignoré en lecture.

Tous les fichiers texte sont modifiables avec un éditeur de texte. Les fichiers binaires doivent être lus par un programme *ad-hoc*.

Rappel du formalisme des formats de lecture :

- **A*n*** ou **a*n*** : n caractères alphanumériques, si n est absent il est pris égal à 1.
- **I*p*** ou **i*p*** : entier de p chiffres ; attention les blancs sont significatifs, il faut donc cadrer les nombres à droite de la zone d'écriture.
- **F*n.p*** ou **f*n.p*** : nombre à virgule flottante de n chiffres avec p décimales. Il faut que n>p+2 pour tenir compte du séparateur décimal et du signe éventuel. Si p est nul c'est la position du séparateur décimal qui prime.
- ***n*X** ou ***n*x** : on ignore n caractères.

Les formats de lecture peuvent être précédés d'un facteur de répétition (2i3 : 2 entiers de 3 chiffres chacun).

9.1. Fichier REP (texte)

C'est le fichier répertoire qui définit la liste des fichiers nécessaires à l'exécution de MAGE, le type de chaque fichier étant repéré par un mot clé (3 caractères) identique à son extension par défaut et suivi par un espace.

Chaque ligne de nom_etude. REP est donc de la forme :

```
EXT un_nom.ext
```

Les mots clé reconnus par MAGE sont :

- AVA : conditions aux limites aval, lois de tarage aux nœuds aval ;
- BIN : stockage des lignes d'eau calculées ;
- BTM : fichier de type CSV pour enregistrer l'évolution du fond sous l'effet du charriage ;
- CAS : descriptions des casiers (nœuds à surface non-nulle), lois hauteur-surface des casiers ;
- CHA : paramètres pour le charriage ;
- CSV : enregistrement à la volée de résultats ponctuels ;
- DRG : définition de la force de traînée ;
- ENV : résultats enveloppe (valeurs maximales)
- ERR : messages d'erreur non fatales et avertissements ;
- HYD : conditions aux limites amont, hydrogrammes d'apports aux nœuds ;
- INI : état initial ;
- LAT : hydrogrammes d'apports latéraux ;
- LIM : conditions aux limites aval, limnigrammes aux nœuds aval ;
- NET : liste des biefs du réseau ;
- NUM : paramètres numériques ;
- PSI : paramètres ψ_t pour ISM ;
- QSO : conditions aux limites amont pour le débit solide (si charriage) ;
- QST : enregistrement des débits solides (fichier CSV) ;
- RUG : Strickler
- SED : description par tronçons des couches sédimentaires ;
- SIN : descriptions des singularités hydrauliques, ouvrages ;
- TRA : fichier de sortie (texte) ;
- VAR : règles de gestion des ouvrages mobiles (programmation temporelle et régulation).

Les mots clé obligatoires sont :

- NET, NUM, RUG, HYD pour les fichiers de données ;

- TRA, BIN pour les fichiers de résultats.

Si un de ces mots clé manque MAGE envoie un message d'erreur fatale et s'arrête.

Dans la suite les fichiers de données seront désignés par le mot clé qui leur est associé (leur extension par défaut).

9.1.1. Enregistrement CSV à la volée de résultats ponctuels

MAGE peut enregistrer en cours de calcul, dans un fichier CSV, la valeur d'une variable en un point de calcul et selon un pas de temps précisés par l'utilisateur.

Chaque fichier CSV est défini par une ligne commençant par le mot-clé CSV.

La syntaxe est :

CSV prefix var ib pk mode

- prefix : chaîne de caractères, nom de base du fichier CSV à produire ;
  le nom du fichier sera : prefix_var_ib_pk.csv
- var : variable à extraire : q, z, v, y ; si la variable est fournie en majuscule le fichier CSV est compressé en éliminant les points alignés intermédiaires : si (q1, t1), (q2, t2) et (q3, t3) sont alignés, on élimine (q2, t2) ;
- ib : numéro du bief contenant le point de calcul ;
- pk : abscisse du point de calcul ;
- mode : 0 = valeur instantanée ; 1 = moyenne sur le pas d'enregistrement ;
- dtcsv : pas de temps d'enregistrement du fichier csv.

Le nombre de lignes CSV est limité à 10.

MAGE n'utilise qu'un seul pas de temps d'enregistrement des fichiers CSV. Le pas de temps d'écriture des fichiers CSV décrits dans REP est forcé pour être le plus grand multiple du pas de temps d'écriture sur BIN inférieur au plus petit des dtcsv non nuls lus sur REP. Si tous les dtcsv sont nuls ou plus petits que le pas de temps d'écriture sur BIN, on prend un pas de temps d'écriture égal au pas de temps d'écriture sur BIN. Les dtcsv non fournis sont nuls.

9.2. Fichier AVA (texte)

Ce fichier donne l'ensemble des lois de tarage (relations Q(z)) imposées aux nœuds aval du réseau.

La description est identique à celle de HYD en remplaçant les temps par des cotes (en mètres).

La seule limite de taille des lois de tarage (nombre de couples (z, Q)) est celle du nombre maximal de données pour l'ensemble des conditions aux limites (HYD+LIM+AVA) fixé à 100 000 × (nombre maximal de bief + 1).

Les interpolations faites par MAGE sont linéaires. En dehors de l'intervalle de définition de la loi de tarage (défini par le premier et le dernier point de la liste) MAGE adopte le comportement suivant :

- pour les cotes inférieures à la cote minimale de la loi de tarage, le prolongement est constant en débit ;
- pour les cotes supérieures à la cote maximale de la loi de tarage le prolongement est linéaire selon la pente des deux dernières points de la loi de tarage.

N.B. : un nœud aval qui n'apparaît ni dans LIM ni dans AVA porte par défaut une condition à la limite aval en régime uniforme.

9.3. Fichier CAS (texte)

Ce fichier donne l'ensemble des lois altitude – surface (horizontale) qui définissent la géométrie des casiers (nœuds à surface non nulle).

Le format est identique à celui de HYD en remplaçant les temps par des cotes (en mètres) et les débits par des surfaces (en hectares).

Nombre de points maximum pour toutes les lois cotes(surface) : 20 × (nombre maximum de nœuds).

Les interpolations faites par MAGE sont linéaires, sauf qu'en dehors de l'intervalle de définition de la loi cote − surface MAGE la prolonge par une surface nulle pour les cotes inférieures à la cote donnée la plus petite et continûment par une surface constante en fonction de la cote pour les cotes supérieures à la cote donnée la plus grande. Ainsi un casier est défini avec une cote de fond qui est la cote la plus basse fournie par l'utilisateur pour sa loi hauteur − surface.

Un nœud doit être décrit par au moins 2 cotes afin de pouvoir définir une cote maximale de remplissage quand le nœud est utilisé comme casier pour déversement latéral.

9.4. Fichier CHA (texte)

Ce fichier permet de définir les paramètres nécessaires au module de charriage. Le format utilisé est :
`mot_clé = valeur`

Les lignes vides et les lignes commençant par une étoile (*) sont ignorées.

Si un mot-clé n'apparaît pas, la valeur par défaut correspondante est utilisée.

Ci-dessous est donné un exemple de fichier commenté avec la liste complète des mots clé reconnus avec les valeurs par défaut ainsi que les valeurs admissibles :

```
*********Paramètres pour le charriage :
sediment_masse_volumique = 2650.
sediment_porosity = 0.4
sediment_angle_repos = 40.
distance_Han = 100.
distance_chargement_d50 = 100.
distance_chargement_sigma = 100.
*
****index de la méthode de modification de la géométrie
*---modification uniforme par lit -> 1
methode_modification_geometrie = 1
*
****index de la méthode pour définir le nombre de Shields critique
*---paramètre de Shields 0,047 -> 1
*---Soulsby                    -> 2
*---Camenen                    -> 3
shields_critique = 1
*
****index de la méthode de correction du nombre de Shields
*---pas de correction -> 0
*---Shields effectif  -> 1
shields_correction = 1
*
****index de la méthode de calcul de la capacité solide
*---Meyer-Peter & Muller -> 1
*---Camenen & Larson     -> 2
*---Engelund & Hansen    -> 3
*---Recking              -> 4
capacite_solide = 1
*
****facteur multiplicateur de la loi de capacité solide
facteur_multiplicateur = 1.
*
****pas de temps pour le charriage défini par un multiple
****du pas de temps de base
pas_de_temps = 6
```

```
*
****largeur active
largeur_active_extremite_1 =
largeur_active_extremite_2 =
*
```

N.B. 1 : l'angle de repos du sédiment est attendu en degrés ; les autres unités sont celles du système international (unités SI).

N.B. 2 : la largeur active est définie par deux lignes directrices dont les noms servent à désigner les extrémités.

9.5. Fichier DEV (texte)

Ce fichier définit les déversements latéraux par-dessus les berges et hors du modèle (représentant de l'eau définitivement perdue). Il est composé de lignes « de type Y » ou/et de lignes « de type Z ». On distingue en effet deux catégories de lignes de définition :

1. les lignes possédant un « Y » (ou « y ») en première colonne sont des lignes définissant un déversement vers un casier c'est-à-dire un nœud à surface non-nulle ;
2. les lignes possédant un « Z » (ou « z ») en première colonne sont des lignes définissant un déversement vers un secteur de bief ayant le même nombre de sections que le secteur qui est déclaré comme déversant.

Remarque : toute ligne commençant par une étoile (∗) sera considérée comme un commentaire et sera ignorée à la lecture des données.

9.5.1. Déversement en casier

Pour chaque secteur déversant on donne :
- caractère Y en 1ère colonne
- caractère G ou D en colonne 2 selon que le déversement a lieu en rive gauche ou droite
- le numéro de bief (colonnes 3 à 5)
- les abscisses des sections amont et aval du secteur du bief
- la cote de déversement pour chacune de ces 2 sections
- un coefficient de débit
- une profondeur d'affaissement de digue
- la proportion de longueur du secteur déversant soumise à affaissement de digue
- le nom du casier récepteur (un nœud non aval)

Format (définitions page 69) : (“Yb”, I3, 2F8.2, 5F10.0, A3) (b = G ou D)

Les valeurs par défaut sont :

− numéro du bief déversant :	requis
− section amont du secteur :	1ère section du bief
− section aval du secteur :	dernière section du bief
− cote de déversement section amont :	cote de berge
− cote de déversement section aval :	cote de berge
− coefficient de débit :	0.
− profondeur des affaissements de digue :	0.
− proportion de longueur des affaissements :	0.
− nom du casier récepteur :	aucun

Remarques :

1. Si le nom du casier est vide, le déversement a lieu hors réseau.
2. Si le nom n'est pas vide, le déversement a lieu vers le nœud de même nom avec retour possible vers le bief si le niveau dans le nœud récepteur devient supérieur au niveau dans le bief.

3. Le niveau dans un nœud est toujours supposé horizontal.
4. Le débit de déversement est calculé selon une loi de seuil qui peut être noyé.
5. Les numéros de bief sont les numéros d'ordre des biefs dans NET.
6. Entre les sections amont et aval du secteur, les cotes de déversement sont interpolées linéairement sauf si les cotes données sont nulles ; dans ce cas les cotes des sections intermédiaires sont les cotes de berge.
7. Si le coefficient de débit est nul, le débit déversé est nul, mais on laisse la ligne d'eau dépasser la cote de déversement.
8. Si le coefficient de débit est pris égal à -1, il y a un message d'erreur en cas de dépassement de la cote de déversement.
9. Le déversement n'est possible que si le casier récepteur n'est pas plein c'est-à-dire si sa cote est inférieure à la dernière cote donnée dans la loi hauteur-surface du fichier CAS qui définit les nœuds à surface non-nulle.
10. On rappelle que la cote d'un casier est égale à la cote dans la section du premier bief qui part de ce nœud.
11. Pour un déversement dans un casier en cul-de-sac on peut définir à l'aval du casier un bief fictif qui ne coule pas (par exemple un bief barré par un déversoir élevé). Il suffit de s'assurer que ce bief ne se vide pas complètement.
12. Dans les informations fournies par le fichier de sortie TRA, le débit déversé est positif si l'écoulement se fait du secteur déversant vers le casier ou l'extérieur du réseau.

9.5.2. Déversement vers un bief

Pour chaque secteur déversant on donne :
- caractère Z en 1ère colonne
- caractère G ou D en colonne 2 selon que le déversement a lieu en rive gauche ou droite
- le numéro de bief (colonnes 3 à 5)
- les abscisses des sections amont et aval du secteur du bief
- la cote de déversement pour chacune de ces 2 sections
- un coefficient de débit
- une profondeur d'affaissement de digue
- la proportion de longueur du secteur déversant soumise à affaissement de digue
- le numéro du bief et l'abscisse de la 1ère section définissant le secteur récepteur. MAGE fait une correspondance section à section. En conséquence, si le pas d'espace du secteur récepteur est différent de celui du secteur déversant, la réception se fera sur une longueur différente que le déversement, ce qui n'est pas réaliste. Néanmoins MAGE fait la correction nécessaire pour que le débit reçu soit égal au débit déversé.

Format (définitions page 69) : ("Zb", I3,2F8.2,5F10.0, I3, F7.0) (b = G ou D)

Valeurs par défaut :

− numéro du bief déversant :	requis
− section amont du secteur :	1ère section du bief
− section aval du secteur :	dernière section du bief
− cote de déversement section amont :	cote de berge
− cote de déversement section aval :	cote de berge
− coefficient de débit :	0.
− profondeur des affaissements de digue :	0.
− proportion de longueur des affaissements :	0.
− secteur récepteur :	aucunes

Remarques :

1. Si le numéro du bief et le Pk de la section définissant le secteur récepteur sont nuls, le déversement a lieu hors réseau. S'ils ne sont pas nuls, le déversement a lieu vers le secteur ainsi défini avec retour possible vers le bief déversant si le niveau dans le bief récepteur devient supérieur au niveau dans le bief déversant.
2. Le débit de déversement est calculé selon une loi de seuil qui peut être noyé.
3. Les numéros de bief sont les numéros d'ordre des biefs dans NET.
4. Entre les sections amont et aval du secteur, les cotes de déversement sont interpolées linéairement sauf si les cotes données sont nulles ; dans ce cas les cotes des sections intermédiaires sont les cotes de berge.
5. Si le coefficient de débit est nul, le débit déversé est nul, mais on laisse la ligne d'eau dépasser la cote de déversement.
6. Si le coefficient de débit est pris égal à -1, il y a un message d'erreur en cas de dépassement de la cote de déversement et un arrêt du programme après onze messages de ce type.
7. Le sens du déversement est entièrement défini par la différence de niveaux entre le bief déversant et le bief récepteur.
8. Dans les informations fournies par le fichier de sortie TRA, le débit déversé est positif si l'écoulement se fait du secteur déversant vers le secteur cible.

9.5.3. Fonctionnement du déversement latéral

Si, dans une section, la cote de l'eau dépasse la cote de déversement de la section il y a alors déversement latéral. Ce déversement peut soit se réaliser vers un CASIER (ligne Y) soit vers un AUTRE SECTEUR DE BIEF (ligne Z). Dans tous les cas, sauf en cas de déversement hors réseau, il y a possibilité de retour du volume déversé vers le secteur déversant.

Le déversement hors réseau est IRRÉVERSIBLE, et l'on modélise ainsi une PERTE d'EAU. Selon la valeur attribuée au coefficient de débit Cd, trois stratégies sont possibles pour chaque section :

Le cas Cd > 0

On veut effectivement simuler un déversement latéral hors modèle avec un coefficient de débit Cd. On a alors un déversement latéral croissant avec la cote de la ligne d'eau. Il s'agit d'un débit réparti analogue au débit latéral défini dans le fichier LAT. Ce débit (en $m^3/s/m$) est défini par une formule de déversoir dénoyé dont l'utilisateur a fixé le coefficient de débit Cd.

Le cas Cd < 0

On veut que le programme MAGE s'arrête si le déversement latéral persiste. Pratiquement MAGE ne calcule aucun déversement latéral, produit un diagnostic (WAR001) signalant le dépassement de la cote la plus haute et continue les calculs (en supposant constante la largeur au miroir au-delà de la cote maximale de la section) jusqu'au 11e diagnostic dans le même pas de temps avant de s'arrêter. En effet le calcul de la ligne d'eau est faux dans ce cas puisque la géométrie, inconnue de MAGE au-delà de la berge, est prolongée arbitrairement par deux murs verticaux de 100 mètres de haut. Cette option est celle retenue par défaut pour les sections qui n'apparaissent pas dans le fichier DEV. Cela permet de continuer le calcul dont le résultat est acceptable seulement si le débordement est de courte durée et de faible amplitude de sorte que les volumes en jeu sont petits.

Le cas Cd = 0

On veut forcer MAGE à calculer la ligne d'eau sans déversement malgré le dépassement de la cote maximale de la section. Cette option est celle retenue par défaut pour les sections qui apparaissent dans le fichier DEV.

9.6. Fichier DRG (texte)

Ce fichier définit le coefficient de traînée (drag force). On définit un coefficient de traînée pour chaque sous-section d'un profil en travers, typiquement un coefficient pour le lit mineur et un coefficient pour chacun des lits majeurs gauche et droit. La valeur par défaut du coefficient de traînée est zéro. Ainsi il n'est besoin de définir les coefficients de traînée que là où ils sont non-nuls.
La définition se fait par tronçon dans chaque bief. Les sections amont et aval de chaque tronçon sont définies par leur abscisse en long.

Chaque ligne définissant un nouveau tronçon doit commencer par la lettre D. Les lignes commençant par une étoile (*) sont des commentaires et ignorées.

Format : ("D", I3,6X, 5F10.0)

Les nombres réels sont sur dix caractères et commencent à la colonne 11.

Chaque ligne comprend (valeurs par défaut entre []) :
- un numéro de bief (au sens de NET)
- l'abscisse en long de la section amont du tronçon [1ère]
- l'abscisse en long de la section aval du tronçon [dernière]
- le coefficient de traînée pour le lit majeur gauche [0.]
- le coefficient de traînée pour le lit mineur [0.]
- le coefficient de traînée pour le lit majeur droit [0.]

N.B. : actuellement la force de traînée n'est prise en compte que dans la méthode ISM, elle ignorée avec *Debord.*

9.7. Fichier HYD (texte)

Ce fichier donne l'ensemble des lois Q(t) d'apports aux nœuds du réseau. Il y a au plus un apport par nœud. Les débits positifs sont des apports et les débits négatifs des pertes (prises par exemple).

Les nœuds aval ne peuvent pas supporter d'apport ponctuel en débit, donc ne doivent pas apparaître dans le fichier HYD.

La ligne indiquant le nœud pour lequel on fournit un hydrogramme a un $ en première colonne. Les nœuds sont désignés par leur nom dans NET (3 caractères).
- On peut ajouter sur la même ligne (format F10.0 en colonne 11) un temps de synchronisation qui permet de faire une translation globale de l'hydrogramme dans le temps. Si $Q_0(t)$ est l'hydrogramme sans décalage, l'hydrogramme Q(t) avec décalage est défini par $Q(t) = Q_0(t+ts)$.
- Si on met un E (ou e) en colonne 21 de la ligne $ alors le débit est considéré comme un débit d'ETP exprimé en mm/heure et il est multiplié par la surface du casier. Si la donnée en débit est positive, son signe est changé par MAGE.
- Si on met un P (ou p) en colonne 21 de la ligne $ alors le débit est considéré comme un débit de pluie exprimé en mm par heure et il est multiplié par la surface du casier.

Les hydrogrammes sont introduits points par points : temps et débit.

Les temps sont exprimés en minutes (format F10.n) ou en jours, heures, minutes (JJJ:HH:MM, caractère « : » en colonnes 4 et 7).

Les débits sont exprimés en m^3/s (format F10.n).

La seule limite de taille des hydrogrammes (nombre de couples (t, Q)) est celle du nombre maximal de données pour l'ensemble des conditions aux limites (HYD+LIM+AVA) fixé à 100 000 × (nombre maximal de bief + 1).

Les interpolations faites par MAGE sont linéaires. En dehors de son intervalle de définition MAGE prolonge l'hydrogramme continûment par un débit constant en fonction du temps.

9.8. Fichier INI (texte)

Ce fichier fournit l'état initial à partir duquel MAGE va pouvoir démarrer la simulation. Ce fichier donne pour chaque section de calcul (liste fournie par le module de géométrie) le débit total dans la section et la cote de la surface libre.

Le format du fichier INI est le suivant :
- 1$^{\text{ère}}$ ligne : ligne de commentaire commençant par une $*$.
- 2$^{\text{e}}$ ligne : commence par un $ et donne la date en minute de la ligne d'eau initiale.
- Pour chaque ligne suivante on a : numéro de bief, numéro de section dans le bief, débit, cote, débit latéral, Stricklers du lit mineur, Stricklers du lit moyen.

Format (définitions page 69) : (1X, 2I3,3X, F10.5, F11.6, F10.7,2F10.5).

Les numéros des biefs correspondent à l'ordre des biefs dans le fichier de géométrie NET.

Dans Mage-8 on n'est plus obligé de fournir les données initiales pour chaque section de calcul. Mage-8 essaye d'interpoler aussi bien que possible les données manquantes.

NB : si le fichier INI n'est pas fourni, Mage-8 essaye de construire lui-même un état initial permanent à partir des informations fournies par les conditions aux limites pour l'instant initial. **Il n'y a aucune garantie de succés pour cette procédure**.

9.9. Fichier LAT (texte)

Ce fichier donne l'ensemble des hydrogrammes d'apports latéraux. Les débits positifs sont des apports et les débits négatifs des pertes (infiltration par exemple).

La description est identique à celle de HYD en remplaçant, dans les lignes qui commencent par un $, le nom du nœud par un numéro de bief (format I3) au sens des numéros de bief dans NET et en ajoutant ensuite les abscisses des sections (format 2F10.n) limitant le secteur du bief sur lequel on veut répartir le débit fourni.

Si on ne définit pas explicitement le secteur d'apport, MAGE prend les sections amont et aval du bief de sorte que le débit est réparti sur le bief entier.

Comme pour le fichier HYD on peut définir un temps de synchronisation (format F10.n en colonne 31) et des temps au format JJJ:HH:MM.
- Si on met un E (ou e) en colonne 41 de la ligne $ alors le débit est considéré comme un débit d'évapotranspiration (ETP) exprimé en mm/heure et il est multiplié par la surface du secteur de bief. Si la donnée en débit est positive, son signe est changé par MAGE.
- Si on met un P (ou p) en colonne 41 de la ligne $ alors le débit est considéré comme un débit de pluie exprimé en mm par heure et il est multiplié par la surface du secteur de bief.

Les interpolations faites par MAGE sont linéaires. En dehors de son intervalle de définition MAGE prolonge l'hydrogramme continûment par un débit constant en fonction du temps.

Ce type de données étant moins souvent utilisé, les données sont stockées dans un fichier temporaire pour économiser la place en mémoire. En conséquence il n'y a pas d'autre limite pour le nombre de données par secteur que la place disponible sur le disque dur. En revanche le nombre de secteurs est limité au nombre maximum de biefs.

Attention : il ne doit pas y avoir d'ouvrage ou de section singulière sur un tronçon qui reçoit un apport latéral. Si nécessaire il faut segmenter l'apport sur les tronçons séparant les ouvrages.

9.10. Fichier LIM (texte)

Ce fichier donne l'ensemble des limnigrammes (relations Z(t)) imposés aux nœuds aval du réseau.

La description est identique à celle de HYD en remplaçant les débits par des cotes exprimées en mètres. Ici aussi on peut définir un temps de synchronisation (format F10.n en colonne 11) et des temps en JJJ : HH : MM.

La seule limite de taille des limnigrammes (nombre de couples (t, Z)) est celle du nombre maximal de données pour l'ensemble des conditions aux limites (HYD+LIM+AVA) fixé à 100 000 * (nombre maximal de bief + 1).

Les interpolations faites par MAGE sont linéaires. En dehors de son intervalle de définition MAGE prolonge le limnigramme continûment par une cote constante en fonction du temps.

On peut définir une condition limite aval en cote périodique, par exemple pour simuler une marée, en fournissant seulement les données d'une période. Il suffit de décrire la fonction Z(t) correspondante sur une période en prenant soin que les cotes de début et de fin de période soient strictement identiques. Dans ce cas MAGE assure la reproduction du même limnigramme comme condition à la limite aval.

Dans ce cas il n'y a pas prolongement du limnigramme par une constante pour les instants situés en dehors du domaine de définition.

Inversement, si on veut un limnigramme qui revienne à son niveau de départ sans pour autant être périodique, il suffit de lui donner une cote très légèrement différente de celle de départ (un écart supérieur à 10^{-5} en valeur relative, soit 0,001 %, suffit).

N.B. : un nœud aval qui n'apparaît ni dans LIM ni dans AVA porte par défaut une condition à la limite aval en régime uniforme.

9.11. Fichier NET (texte)

Ce fichier donne la liste des biefs du modèle et définit ainsi la topologie du réseau. On définit un bief par ligne et chaque ligne qui commence par une étoile (*) est un commentaire qui est ignoré.

Un bief est défini par un nom, un nœud amont, un nœud aval et le nom du fichier de géométrie qui lui correspond. Ce fichier de géométrie est un fichier au format ST.

Format d'une ligne : 4 chaînes de caractères séparées par des espaces. Les contraintes de longueur sont :

- au plus 15 caractères pour le nom du bief ;
- 3 caractères pour les noms des nœuds. Il est recommandé d'utiliser des noms de nœud formés de 3 caractères non-espace et commençant par une lettre ;
- au plus 60 caractères pour le nom du fichier de géométrie. Ce nom est son chemin, soit relatif par rapport au dossier qui contient le fichier NET, soit absolu. Il est pratique de stocker tous les fichiers de géométrie dans un sous-dossier dédié.

Exemple de fichier NET :

```
*---exemple de fichier NET avec 2 biefs
Bief_1 aaa bbb Mailleur/Bief_1.M
Bief_2 bbb ccc Mailleur/Bief_2.M
```

9.11.1. Fichiers de géométrie ST et M

Les formats ST et M sont essentiellement la même chose, l'extension M permet de distinguer les fichiers de géométrie produits par le mailleur SECMA de ses fichiers d'entrée ST.

Un fichier ST décrit une suite de profils en travers, chaque profil est décrit par un bloc de lignes constitué d'une ligne d'entête suivie par un nombre quelconque de lignes pour décrire chaque point du profil.

La ligne d'entête a le format suivant :

```
4i6,f13.0,2x,a20
```

soit 4 entiers sur 6 caractères chacun suivis d'un réel sur 13 caractères, puis 2 espaces et enfin une chaîne de caractères de longueur maximale 20. Le premier entier est le numéro d'ordre du profil dans le fichier ST, les 2 suivants ne sont plus utilisés (ils peuvent être nuls) et le 4^{e} est le nombre de points du profil. Le nombre réel est le Pk du profil exprimé en mètres. Enfin la chaîne de caractères permet de définir le nom du profil.

Viennent ensuite autant de lignes qu'il y a de points dans le profil. Sur chaque ligne sont indiqués les coordonnées X, Y et Z du point suivi éventuellement de l'étiquette du point. Les seules contraintes sur le format de cette ligne sont que les 3 réels X, Y et Z doivent avoir un point décimal pour empêcher toute ambigüité sur le type des variables, qu'ils doivent être séparés par au moins un espace. L'étiquette qui suit le 3e réel est séparée d'un espace et a au plus 3 caractères (on ne distingue pas les majuscules des minuscules).

Le choix du repère géométrique utilisé pour définir les coordonnées X, Y et Z relève de la responsabilité du modélisateur. Ce peut être du NGF93 (en France) ou équivalent ou encore un repère local selon les besoins.

La fin de cette liste de points est marquée par une ligne spéciale composées des coordonnées 999,999.

Exemple de bloc profil dans un fichier ST :

```
     1      0      0     18   71962.0000   s145
   71962.0000     -10.0000     165.0000
   71962.0000       0.0000     160.0000 rg
   71962.0000       4.0000     153.8000
   71962.0000       4.0000     153.3000 fon
   71962.0000      30.0000     153.3000
   71962.0000      30.0000     153.8000
   71962.0000      80.0000     155.0000 rd
   71962.0000      94.0000     155.1000
   71962.0000     136.0000     155.2500
   71962.0000     188.0000     155.0000
   71962.0000     232.0000     155.4000
   71962.0000     270.0000     155.5000
   71962.0000     376.0000     156.0000
   71962.0000     444.0000     158.0000
   71962.0000     644.0000     158.3000
   71962.0000     714.0000     159.0000
   71962.0000     730.0000     160.0000
   71962.0000     762.0000     161.0000
     999.9990     999.9990     999.9990
```

Rappel : les étiquettes des points des profils permettent de définir les lignes directrices d'un bief. Tous les points portant la même étiquette décrivent une ligne directrice. Bien entendu deux points d'un même profil ne peuvent pas avoir la même étiquette.

Les limites du lit mineur sont définies par les lignes directrices RG et RD. Les profils sont supposés donnés de la rive gauche vers la rive droite. Si le point RD est avant le point RG, alors le profil est considéré comme ayant été donné de la rive droite vers la rive gauche et Mage-8 le retourne.

9.11.2. Fichiers de géométrie étendus pour les données sédimentaires

En mode charriage Mage-8 fait évoluer la géométrie sous l'effet du transport solide. Cette évolution concerne la cote de chaque point de chaque profil ainsi que la description des couches sédimentaires. Mage-8 enregistre l'état final de la géométrie de chaque bief dans des fichiers ST/M suffixés par _final. La ligne de chaque point est complétée par la description des couches sédimentaires de ce point selon le même schéma que pour le fichier SED, l'épaisseur de la couche sédimentaire étant alors remplacée par la cote de son plancher. Ces fichiers peuvent être utilisés tels quels si on veut faire une simulation en repartant de cet état final. Dans ce cas il faut utiliser la bonne option -c pour le lancement de Mage-8.

9.12. Fichier NUM (texte)

Ce fichier donne les paramètres numériques qui permettent de piloter MAGE. Le plus simple est de le constituer à partir de la copie d'un exemple.

Exemple de fichier NUM :

```
Paramètre d'implicitation........[0.7].: 0.70 S B R Permanent
Instant initial en JJJ:HH:MIN:SS.......: 00:00:00:00
Instant final en JJJ:HH:MIN:SS.........: 4:00:00:00
Pas de temps en SECONDES........[720.].: 300.0     1.000
Pas de temps d'écriture sur. TRA.......: 86400.0
```

```
Pas de temps d’écriture sur. BIN.......: 21600.0
type des itérations..............[00].: -1
Coefficient de lissage...........[0.].: 0.00000
Nombre de Courant maximum admis..[-1.].: 100000.0
Tirant d’eau minimum...........[0.01].: 0.010
Nombre maximum d’itérations.......[10].: 10
Facteur de réduction du pas de temps...: 2
itérations à précision maximale........: 99
Facteur de réduction de précision Z Q..: 1+1 1+2
Itérations avant basculement...........: 99
Borne d’erreur en cote pour la maille..: -1.00000
Valeur maximum du nombre de Froude.....: 2.000
Bilan en volume par bief.........(O/N).: O 0.00100 10000.0
Sections témoins (bie/sec).............:
```

Les caractères « : » en fin de commentaires sont en colonne 40 et le premier caractère utile est en colonne 42. Il n’est pas tenu compte des caractères précédents qui ne servent que d’aide mémoire à l’utilisateur.

9.12.1. Ligne « Paramètre d’implicitation »

Sur cette ligne on peut définir 5 paramètres :

- Le coefficient θ du schéma numérique de Preissmann. Sa valeur doit être comprise entre 0,5 et 1. la valeur par défaut est 0,65.
- 1ère lettre : S ou L. Elle définit le type de discrétisation de l’équation de continuité : soit on discrétise $\partial S/\partial t$ (S), soit on discrétise $L\cdot\partial Z/\partial t$ (L). Dans le cas ISM ce paramètre n’est pas utilisé ce qui revient à toujours utiliser S pour ISM. De façon générale le choix recommandé est S.
- 2e lettre : A ou B. Elle définit le type de discrétisation du terme gSJ : soit on discrétise S et J séparément (A : produit des moyennes) soit ensemble (B : moyenne du produit). Dans le cas ISM ce paramètre n’est pas utilisé ce qui revient à toujours utiliser B pour ISM. Le choix recommandé est B.
- 3e lettre : R, G ou A. Elle définit le type du test d’arrêt : on calcule l’écart entre 2 itérées successives et on compare à une valeur de référence pour déterminer si cet écart peut être considéré comme négligeable devant cette valeur de référence. Il est considéré comme négligeable si l’écart est inférieur au produit de ε par la valeur de référence ; ε est pris par défaut égal à 10^{-9}, il sera cependant, le cas échéant, multiplié par le facteur de réduction de la précision (cf. §9.12.12)
  - (R) : la valeur de référence est calculée pour chaque bief. C’est la valeur maximale du tirant d’eau pour les écarts en cote et la valeur maximale du débit (et au moins 1) pour les écarts en débit.
  - (G) : même chose que (R) mais la valeur de référence est calculée sur tout le réseau.
  - (A) : la valeur de référence est prise égale à 1, le test est donc fait en valeur absolue.
  - l’ordre de sévérité décroissante des tests d’arrêt est en général : A, R, G.
- mot clé « Permanent ». En fait seul le P de permanent est lu (P ou p). Si présent le fichier d’état initial INI est ignoré et MAGE utilise sa procédure d’initialisation interne.

9.12.2. Lignes « instant initial » et « instant final »

Instant de départ de la simulation en JJJ:HH:MM:SS.

La date peut être négative. Il n’y a aucune notion de calendrier ; en particulier les nombres d’heures (HH), minutes (MM) et secondes ne sont limités que par la place disponible (2 caractères donc 99).

Dans le cas de l’instant final, si on donne une date supérieure ou égale à 999:99:00:00, MAGE interprète cela comme une requête de calcul en régime permanent. Dans ce cas la simulation est poursuivie tant qu’un état stationnaire n’est pas atteint. La stationnarité est détectée quand pour au moins 10 pas de temps consécutifs, le nombre d’itérations a été égal à 1.

9.12.3. Ligne « pas de temps »

La première valeur est le pas de temps maximal exprimé en secondes. La deuxième valeur est le pas de temps minimal au-dessous duquel MAGE ne pourra pas descendre.

Les formats de lecture sont 2F10.n.

MAGE gère automatiquement le pas de temps en fonction des contraintes de convergence imposées par l'utilisateur (voir les lignes suivantes) et des difficultés numériques propres au jeu de données de la simulation.

Grossièrement, quand tout va bien, MAGE utilise le pas de temps maximal et quand il y a des difficultés numériques, il utilise un pas de temps plus petit. S'il se trouve contraint à utiliser un pas de temps inférieur au pas de temps minimal, MAGE s'arrête avec un message d'erreur fatale.

Il n'y a pas de limite inférieure sur le pas de temps minimal, mais les affichages du pas de temps sont faits avec 2 décimales ; il n'y a pas de limite supérieure sur le pas de temps maximal.

Les valeurs par défaut sont 600 (300 avec PamHyr) et 1. Si le pas de temps maximal est donné plus petit que le pas de temps minimal alors il est remplacé par 16 fois la valeur du pas de temps minimal.

***Conseil d'utilisation** : le pas de temps maximal de la simulation doit être choisi en fonction de ce que l'on connaît de la dynamique de l'écoulement. Plus les variations de l'écoulement sont rapides plus le pas de temps doit être petit.*

9.12.4. Lignes « Pas de temps d'écriture sur TRA » et « Pas de temps d'écriture sur BIN »

Ces deux lignes donnent respectivement les pas de temps de sauvegarde d'informations sur TRA et BIN.

***Conseil d'utilisation** : dans le cas de BIN il faut bien choisir la valeur du pas de temps d'écriture. En effet c'est elle qui commandera la finesse temporelle de l'affichage des résultats. Avec un pas de temps trop grand on risque d'oublier des variations de débit ou de niveau intéressantes tandis qu'avec un pas de temps trop petit, on va stocker des calculs intermédiaires peut-être inutiles qui vont produire un fichier BIN inutilement volumineux.*

9.12.5. Ligne « type des itérations »

Cet indicateur permet de choisir le type d'itérations faites par MAGE à chaque pas de temps pour résoudre le système d'équations non linéaires obtenu après discrétisation.

Les non-linéarités proviennent d'une part des équations de Saint-Venant et d'autre part des lois d'ouvrage.

Il y a cinq options possibles :

- +1 : pas d'itération sur Saint-Venant et Point Fixe sur les singularités ; obsolète ;
- 0 : Newton-Raphson sur Saint-Venant et Point Fixe sur les singularités ; obsolète ;
- -1 : Newton-Raphson sur Saint-Venant et sur les singularités ;
- -2 : même chose que le choix -1 mais adapté au cas des hauteurs d'eau grandes et quasi égales sur les sections amont et aval des singularités. Ce choix convient aux réseaux très plats.
- -3 : même chose que le choix -1, mais les déversements latéraux ne sont pas ajustés au cours des itérations, on conserve l'estimation faite lors de la première itération de chaque pas de temps. Option à essayer en cas de difficulté de convergence lors de déversements latéraux.

La valeur par défaut est -1 et les valeurs 0 et 1 sont désormais indisponibles, les itérations de points fixes, moins efficaces, ayant été retirées.

9.12.6. Ligne « Coefficient de lissage »

La valeur par défaut est 0. c'est-à-dire pas de lissage. Le coefficient n'est utilisé que s'il est positif. Le lissage permet d'aider à passer les petites instabilités numériques ; il consiste à remplacer la solution en une section par une moyenne pondérée des valeurs de la solution dans les sections voisines, à la manière de la discrétisation du Laplacien.

***Conseil d'utilisation** : il faut utiliser le lissage avec précaution et parcimonie. Les valeurs classiques du coefficient sont de l'ordre de 0,1.*

9.12.7. Ligne « Nombre de Courant »

Cette ligne donne une borne supérieure à la valeur que peut atteindre le nombre de Courant de la simulation c'est-à-dire $Sup\left\{\frac{(U_i+c_i)\Delta t}{\Delta x_i};i=1,N\right\}$ où U_i et c_i sont respectivement la vitesse moyenne et la célérité dans la section de calcul i.

Il s'agit en fait d'un moyen de contrôle du pas de temps, celui-ci étant ajusté pour maintenir la valeur du nombre de Courant au plus près de sa valeur de consigne. Bien entendu le pas de temps effectivement utilisé est un compromis entre toutes les valeurs de pas de temps produites par les diverses consignes, pas de temps maximal, minimal, d'écriture sur TRA et BIN, nombre de Courant, convergence des itérations, etc.

La valeur par défaut est -1 c'est-à-dire pas de limite supérieure.

***Conseil d'utilisation** : en règle générale, pour un écoulement en régime fluvial, on considère que le nombre de Courant ne devrait pas dépasser 30 à 100 pour que les effets du schéma de Preissmann sur le calcul de la vitesse de propagation (erreur de phase) ne soient pas trop sensibles.*

9.12.8. Ligne « Tirant d'eau minimum »

Il s'agit de la valeur plancher du tirant d'eau qui permet de traiter les difficultés numériques qui se traduisent par l'obtention de profondeurs négatives, ce qui bien sûr n'est pas un résultat physiquement possible. Dans le cas d'apparition d'un tirant d'eau négatif dans une section de calcul, la hauteur d'eau calculée est brutalement remplacée par la valeur plancher choisie par l'utilisateur ainsi que les hauteurs dans les sections voisines si celles-ci sont inférieures à la valeur plancher, ceci afin d'éviter d'engendrer des discontinuités artificielles.

Si la valeur plancher est négative ou nulle, les tirants d'eau négatifs sont traités par messages d'erreur et diagnostic de divergence des itérations.

Valeur par défaut : 0 m (0,01 m avec PamHyr).

***Conseil d'utilisation** : il faut éviter de choisir une valeur plancher trop grande, en particulier une valeur qui pourrait être supérieure à un tirant d'eau effectivement possible dans le cours d'eau simulé. Pour une rivière classique avec un tirant d'eau habituel de l'ordre du mètre, 0,01 m (1 cm) est une bonne valeur.*

9.12.9. Ligne « Nombre d'itérations maximal »

Il s'agit des itérations réalisées à chaque pas de temps pour résoudre le système d'équations non-linéaires obtenu par la discrétisation. Ce nombre maximal ne peut dépasser 99.

Valeur par défaut : 10.

Conseil d'utilisation : *il est rarement utile d'augmenter le nombre maximal d'itérations. Cela peut cependant être le cas si MAGE produit de nombreux diagnostics de non-convergence avec des écarts entre deux itérées successives seulement légèrement supérieurs à la valeur limite (10^{-9}). Dans ce cas on peut essayer une stratégie en deux temps ; d'abord augmenter le nombre d'itérations permises puis, si cela ne permet pas d'atteindre des écarts suffisamment petits, réduire la sévérité du test d'arrêt ; voir plus loin.*

9.12.10. Ligne « Facteur de réduction du pas de temps »

C'est le facteur entier par lequel le pas de temps est divisé en cas de retour en arrière pour divergence ou non-convergence. Cette valeur ne peut être supérieure à 99.

Valeur par défaut : 2.

9.12.11. Ligne « Nombre d'itérations à précision maximale »

Il s'agit du nombre d'itérations au-delà duquel la sévérité du test d'arrêt est réduite en utilisant les facteurs définis à la ligne suivante. Cette valeur ne peut être supérieure à 99. Elle n'a aucun effet si elle est supérieure au nombre maximal d'itérations.

Valeur par défaut : 99.

9.12.12. Ligne « Facteur de réduction de précision »

Sur cette ligne l'utilisateur indique dans une notation exponentielle les facteurs multiplicatifs correcteurs du ε du test d'arrêt standard (10^{-9}). Le premier est le facteur de réduction de la précision en cote, le deuxième pour le débit et le troisième pour le résidu.

Les facteurs de réduction de la précision sous la forme n+k sont interprétés par MAGE comme $n*10^k$. Les trois facteurs de réduction peuvent être différents. Si on ne fournit pas de facteur de réduction en débit, il est pris égal à celui en cote. Si on ne fournit pas le facteur de réduction pour le résidu il est pris égal à 1.

Par exemple si on choisit des facteurs de réduction de « 1+1 » alors le ε de 10^{-9} est remplacé par 10^{-8}.

On peut utiliser un exposant négatif (n-k) si on souhaite augmenter la précision.

Conseil d'utilisation : *il n'est pas raisonnable de choisir des exposants trop grands, par exemple supérieurs à 6. Dans les cas vraiment difficiles il peut être nécessaire de forcer un test très faible sur le résidu (9+9). Dans ce cas il est prudent de s'assurer que les résidus affichés sur la console et dans le fichier output sur la ligne de chaque pas de temps, restent bien raisonnablement petits.*

9.12.13. Ligne « Itérations avant basculement »

L'utilisateur indique ici le nombre d'itérations avant changement du type d'itérations de -1 à 0 ; la valeur par défaut est 99 c'est-à-dire pas de basculement.

Conseil d'utilisation *: ce paramètre n'a plus d'utilité aujourd'hui les itérations de point-fixe ayant été supprimée, l'expérience ayant montré que les itérations de type Newton-Raphson sont les plus efficaces sans être trop coûteuses en temps de calcul. Cette ligne est conservée pour des raisons de compatibilité du format NUM.*

9.12.14. Ligne « Borne d'erreur en cote pour la maille »

Cette borne d'erreur est la valeur maximale de l'écart en cote entre les sections adjacentes à un nœud lorsque le réseau simulé comporte une maille (donc au moins une diffluence). Dans ce cas l'égalité des cotes dans les différentes sections adjacentes d'une diffluence ne s'obtient pas par construction comme pour un confluent mais comme résultat du calcul. Si l'écart dépasse la borne d'erreur choisie pas l'utilisateur, cela est considéré comme un indice de divergence des itérations.

Il est possible de donner une borne d'erreur négative. Dans ce cas MAGE force l'égalité des cotes aux nœuds en remplaçant ces cotes par leur moyenne sur les sections adjacentes. En général la simulation gagne ainsi en stabilité.

Valeur par défaut : -1 (0 est remplacé par -1).

9.12.15. Ligne « Valeur maximum du nombre de Froude »

Il s'agit de la valeur du nombre de Froude au-dessus de laquelle une divergence est diagnostiquée. Le nombre de Froude dont il s'agit est le maximum des nombres de Froude locaux (par sections de calcul).

Si cette valeur maximale est atteinte quelque part sur le réseau, alors MAGE interrompt le pas de temps en cours et reprend avec un pas de temps réduit.

Valeur par défaut : 1,5.

Conseil d'utilisation *: choisir une valeur supérieure à 1, permet de laisser faire le schéma numérique au voisinage du régime torrentiel. Assez souvent il est possible d'éviter l'échec de la simulation bien que le schéma de Preissmann ne soit pas adapté en principe aux écoulements torrentiels. En revanche il ne faut pas choisir une valeur trop grande parce qu'elles sont le signe de vraies divergences et instabilités numériques. Voir le chapitre 13.4 Prise en compte des écoulements torrentiels.*

9.12.16. Ligne « Bilan en volume par bief »

Cette ligne indique si on veut calculer le bilan de volume par bief (O/N), le seuil de divergence sur l'erreur en volume et le volume de bief minimum de prise en compte de l'erreur.

Le bilan de volume par bief est le bilan « Entrée – Sortie – Variation du stock » de chaque bief. En principe ce bilan est nul à la fin de chaque pas de temps.

Le seuil de divergence est la valeur de l'erreur relative au-delà laquelle MAGE doit considérer que les itérations ont divergé.

La troisième valeur est le volume minimum en m^3 au-dessous duquel un bief n'est pas pris en compte dans ce calcul de bilan.

Valeurs par défaut : N 0,0 0,0

Si l'indicateur est mis à O, il n'y a pas de valeurs pas défaut. Toute valeur de l'indicateur autre que O est interprétée comme N.

***Conseil d'utilisation** : des valeurs raisonnables sont 0,001 pour le seuil de divergence et 10000,0 pour le volume minimal.*

9.13. Fichier PSI (texte)

Ce fichier définit les coefficients ψ_t nécessaires pour ISM. On définit un seul coefficient ψ_t par profil, sa valeur par défaut est zéro. Ainsi il n'est besoin de définir les coefficients ψ_t que là où ils sont non-nuls.
La définition se fait par tronçon dans chaque bief. Les sections amont et aval de chaque tronçon sont définies par leur abscisse en long.

Chaque ligne définissant un nouveau tronçon doit commencer par la lettre P. Les lignes commençant par une étoile (*) sont des commentaires et ignorées.

Format : ("P", I3,6X, F10.0)

Le nombre réel est sur dix caractères et commence à la colonne 11.

Chaque ligne comprend (valeurs par défaut entre []) :
- un numéro de bief (au sens de NET)
- l'abscisse en long de la section amont du tronçon [1ère]
- l'abscisse en long de la section aval du tronçon [dernière]
- le coefficient ψ_t [0.]

9.14. Fichier QSO (texte)

Ce fichier définit les conditions aux limites amont en débit solide. Il a le même format que le fichier HYD dans lequel on aura remplacé le débit liquide exprimé en m^3/s par le débit solide exprimé en kg/s.

9.15. Fichier RUG (texte)

Ce fichier définit les coefficients de rugosité. La définition se fait par tronçon dans chaque bief. Les sections amont et aval de chaque tronçon sont définies par leur abscisse en long.

Chaque ligne définissant un nouveau tronçon doit commencer par la lettre K. Les lignes commençant par une étoile (*) sont des commentaires et ignorées.

Format : ("K", I3,6X, 4F10.0)

Les nombres réels sont sur dix caractères et commencent à la colonne 11.

Chaque ligne comprend (valeurs par défaut entre []) :
- un numéro de bief (au sens de NET)
- l'abscisse en long de la section amont du tronçon [1ère]
- l'abscisse en long de la section aval du tronçon [dernière]

- si *Debord* :
  - le coefficient de Strickler pour le lit mineur
  - le coefficient de Strickler pour le lit moyen [idem mineur]
- si ISM :
  - le coefficient de Strickler pour le lit majeur gauche
  - le coefficient de Strickler pour le lit mineur
  - le coefficient de Strickler pour le lit majeur droit [idem majeur gauche]

N.B. : Il faut fournir un coefficient pour chaque section du réseau. Il peut y avoir recouvrement de 2 tronçons. Dans ce cas MAGE conserve seulement la dernière valeur introduite.

9.16. Fichier SED (texte)

Ce fichier décrit les couches sédimentaires, tronçon par tronçon. Les couches sont définies par leur épaisseur et tous les points des profils appartenant à un tronçon partagent les mêmes couches sédimentaires.

Il faut définir une ligne pour les valeurs par défaut puis une ligne par tronçon qui diffère des valeurs par défaut.

Exemple :

```
* description des sédiments
defaut 2 10. 0.0001 3. 9999.9 1000. 0.0001 3. 9999.9
Bief_1 7501. 6999. 2 1. 0.0002 2. 9999.9 100. 0.0007 7. 9999.9
```

Ligne `defaut` : le 1er entier indique le nombre de couches sédimentaires (2 dans l'exemple), ensuite chaque couche est définie par 4 réels : épaisseur, d_{50}, étendue granulométrique σ, contrainte critique.

La définition d'un tronçon suit le même modèle, sauf qu'elle commence par le nom du bief suivi de l'abscisse de début et de l'abscisse de fin du tronçon.

Si la contrainte critique est supérieure à 1000, la couche est inérodable.

9.17. Fichier SIN (texte)

9.17.1. Généralités

Ce fichier donne la liste des singularités, ouvrages en travers et latéraux, avec les lois de fonctionnement utilisées dans MAGE.

Chaque ouvrage élémentaire est décrit par une ligne commençant par la lettre qui désigne son type suivi du numéro de bief et de l'abscisse de la section contenant l'ouvrage, viennent ensuite les paramètres propres au type d'ouvrage (5 maximum) puis le nom de l'ouvrage.

Les champs sont séparés par des espaces et les nombres réels doivent obligatoirement contenir un point décimal pour être correctement interprétés. Seuls les derniers champs peuvent être laissés vides, dans ce cas ils prennent leur valeur par défaut. Autrement dit on ne peut laisser un champ vide si un champ plus à droite ne l'est pas, il faut donc le remplir avec la valeur par défaut. En effet on ne peut pas distinguer dans ce cas un séparateur (espace) et un champ vide.

On peut placer jusqu'à 15 ouvrages élémentaires dans une même section de calcul.

Les unités utilisées sont toujours celles du système international.

Le nom de l'ouvrage (facultatif) est une chaîne de 10 caractères maximum placée à la fin de la ligne. Si le nom commence par un caractère numérique il faut que tous les champs précédents soient renseignés, en particulier les 5 champs réels doivent tous être renseignés même pour les ouvrages à 4 paramètres seulement. Il est plus simple d'éviter les noms qui commencent par un chiffre.

Si on définit un ouvrage dans une section non singulière, alors MAGE applique la loi de l'ouvrage entre cette section et la section de calcul suivante. La longueur sur laquelle s'applique la loi de l'ouvrage peut alors dépendre de la discrétisation spatiale produite par le mailleur, à moins que la section suivante soit elle-même une section de données suffisamment proche de la précédente pour le choix d'un pas d'espace raisonnable ne conduise pas le mailleur à insérer une section interpolée entre les deux.

9.17.2. Ouvrages et singularités disponibles

Les ouvrages et singularités disponibles dans MAGE sont, par ordre alphabétique de lettre clé :
- A : perte de charge singulière selon la formule de BORDA ;
- B : buse circulaire fonctionnant comme un orifice ;
- C : clapet ou porte à la mer ;
- D : déversoir-orifice (mise en charge possible) avec cote du seuil variable ;
- F : orifice-voûte fonctionnant comme un orifice ;
- L : déversoir latéral ;
- O : déversoir-orifice (mise en charge possible) avec cote de mise en charge variable ;
- P : pompe ;
- T : déversoir trapézoïdal ;
- V : vanne de fond ; loi standard ;
- W : vanne de fond ; loi simplifiée ;
- X : ouvrage défini par l'utilisateur.

9.17.3. Les ouvrages générant une perte de charge

9.17.3.1. D : déversoir-orifice (mise en charge possible) avec cote du seuil variable.

Il s'agit d'un déversoir-orifice (de section d'écoulement) rectangulaire qui est défini par sa largeur déversante, sa cote de déversement (altitude à partir de laquelle le seuil déverse c'est-à-dire l'altitude de la crête du seuil qui est supposée horizontale), sa cote de mise en charge (le haut de l'orifice) et son coefficient de débit pour le régime dénoyé. Pour un seuil qui ne passe pas en charge il suffit de choisir une cote de mise en charge très grande.

La loi de débit utilisée gère automatiquement la transition entre régime noyé et dénoyé et adapte le coefficient de débit pour assurer la continuité du débit. Le coefficient théorique de 0,385 (en fait $\frac{2}{3\sqrt{3}}$) correspond à un coefficient de débit de 1 en régime noyé.

La cote de déversement est variable, soit en fournissant une programmation temporelle (Z_D en fonction du temps), soit en fournissant une règle de gestion pour en faire, par exemple, un seuil mobile à niveau amont constant. Dans les deux cas on utilise le fichier VAR pour définir les informations nécessaires. Le nom de l'ouvrage est alors nécessaire pour permettre d'identifier l'ouvrage dans VAR.

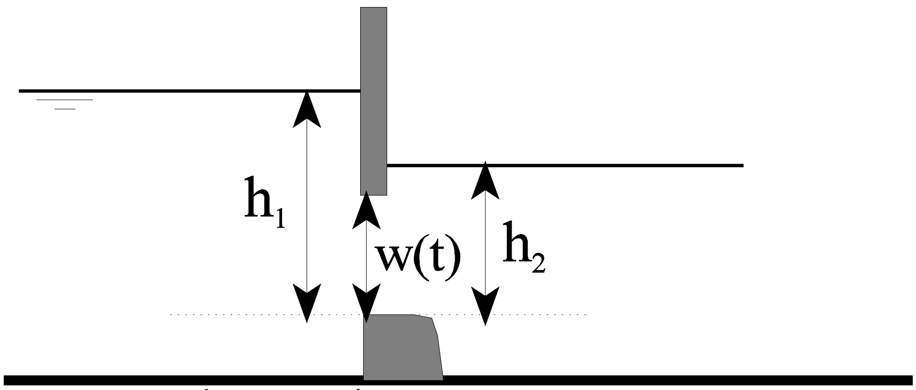


Figure 13: schéma d'un déversoir-orifice

notations :
- h_1 est la hauteur d'eau amont au-dessus de l'ouvrage ;
- h_2 est la hauteur d'eau aval au-dessus de l'ouvrage ;

- w(t) est la hauteur de l'orifice c'est-à-dire son ouverture variable au cours du temps ;
- L est la largeur déversante du déversoir dont la crête est supposée horizontale ;
- μ est le coefficient de débit de l'ouvrage pour le régime dénoyé ;

On distingue 5 régimes de fonctionnement, correspondant chacun à une expression spécifique du débit en fonction de la perte de charge :

surface libre dénoyée	$Q=\mu\sqrt{2g}Lh_1^{3/2}$	si $h_1<w$ et $h_2<\frac{2}{3}h_1$
surface libre noyée	$Q=\mu\frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{2g}Lh_2\sqrt{h_1-h_2}$	si $h_1<w$ et $h_2\geq\frac{2}{3}h_1$
charge dénoyée	$Q=\mu\sqrt{2g}L\left[h_1^{3/2}-\left(h_1-w\right)^{3/2}\right]$	si $h_1\geq w$ et $h_2<\frac{2}{3}h_1$
charge noyée partiellement	$Q=\mu\sqrt{2g}L\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}h_2\sqrt{h_1-h_2}-\left(h_1-w\right)^{3/2}\right]$	si $\begin{cases}h_1\geq w\\ \frac{2}{3}h_1\leq h_2<\frac{2}{3}h_1+\frac{1}{3}v\end{cases}$
charge noyée totalement	$Q=\mu\frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{2g}Lw\sqrt{h_1-h_2}$	si $\begin{cases}h_1\geq w\\ h_2\geq\frac{2}{3}h_1+\frac{1}{3}w\end{cases}$

(9.1)

Paramètres à fournir dans la ligne décrivant l'ouvrage [valeurs par défaut autre crochets] : D, N°bief, Pm Section, Largeur déversante, Cote de déversement, Cote de mise en charge [9999.], Coefficient de débit [0.4], Nom.

9.17.3.2. O : déversoir-orifice (mise en charge possible) avec cote de mise en charge variable.

C'est le même ouvrage que le déversoir-orifice à seuil mobile (D) sauf que cette fois c'est la cote de mise en charge qui est mobile. Il y a donc un paramètre supplémentaire qui est l'ouverture maximale de l'orifice exprimée par une cote. Si cette cote est absente, elle est prise égale à la cote de mise en charge actuelle + 9999.

Paramètres à fournir dans la ligne décrivant l'ouvrage : O, N°bief, Pm Section, Largeur déversante, Cote de déversement, Cote de mise en charge actuelle [9999.], Coefficient de débit [0.4], Cote de mise en charge maximale [Cote de mise en charge + 9999], Nom.

Clapet : un ouvrage de ce type peut être régulé afin de simuler un clapet anti-retour. Voir § 9.18.4 pour la mise en œuvre. Dans ce cas la cote de mise en charge actuelle correspond à la position « fermé » du clapet et doit être fixée à une très petite valeur non nulle (ouverture de 1 mm par exemple) et la cote de mise en charge maximale correspond à l'ouverture de l'orifice pour la position « ouvert » du clapet.

9.17.3.3. V : vanne de fond ; loi standard.

Il s'agit d'une vanne (de section d'écoulement) rectangulaire qui est définie par la largeur de son ouverture, la cote de son radier, sa cote de mise en charge (le haut de l'orifice) et son coefficient de débit pour le régime dénoyé.

Cette vanne est supposée toujours fonctionner en charge. Un écoulement à surface libre sous la vanne provoque une erreur fatale et l'arrêt de MAGE. Si un passage à surface libre a lieu, il est préférable d'utiliser le type déversoir-orifice.

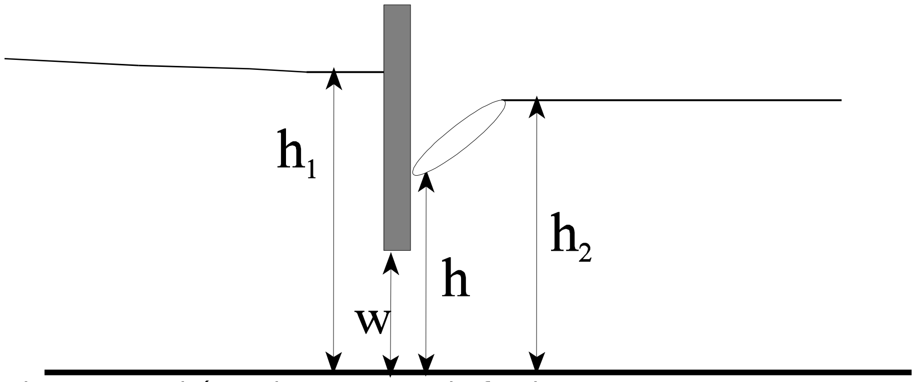


Figure 14: schéma d'une vanne de fond

On calcule h solution positive de l'équation du second ordre suivante :

$$Y^2-\left(4\mu w\frac{1-\frac{\mu w}{h_2}}{1-\left(\frac{\mu w}{h_1}\right)^2}\right)Y + \left(4\mu w\frac{1-\frac{\mu w}{h_2}}{1-\left(\frac{\mu w}{h_1}\right)^2}h_1-h_2^2\right) = 0 \tag{9.2}$$

charge noyée $Q=\mu\sqrt{2g}\left[1-\left(\frac{\mu w}{h_1}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}Lw\sqrt{h_1-h}$ si $h>\mu\cdot w+0{,}001$

charge dénoyée $Q=\mu\sqrt{2g}Lw\sqrt{h_1-\mu w}$ si $h<\mu\cdot w+0{,}001$

notations :

- h_1 est la hauteur d'eau amont au-dessus de l'ouvrage
- h_2 est la hauteur d'eau aval au-dessus de l'ouvrage
- w est la hauteur de l'ouverture qui peut varier en fonction du temps
- L est la largeur de la vanne, supposée rectangulaire
- µ est le coefficient de contraction ou débit

Paramètres à fournir dans la ligne décrivant l'ouvrage : V, N°bief, Pm Section, Largeur, Cote du radier, Cote de mise en charge, Coefficient de débit, Nom.

9.17.3.4. W : vanne de fond ; loi simplifiée.

Pour les vannes on peut utiliser une loi simplifiée du type :

$$Q=\mu\sqrt{2g}\cdot Lw\cdot\sqrt{y_1-y_2} \tag{9.3}$$

Où µ est un coefficient à fournir, L est la largeur de la vanne et y1 et y2 sont respectivement les tirants d'eau amont et aval de la vanne.

Plus précisément, la loi utilisée par MAGE est la suivante :

$$\begin{array}{lll} \text{charge noyée} & Q=\mu\sqrt{2g}Lw\sqrt{h_1-h_2} & \text{si } h_2\geq\mu\cdot w \\ \text{charge dénoyée} & Q=\mu\sqrt{2g}Lw\sqrt{h_1-\mu w} & \text{si } h_2<\mu\cdot w \end{array} \tag{9.4}$$

notations :

- h_1 est la hauteur d'eau amont au-dessus du radier de l'ouvrage
- h_2 est la hauteur d'eau aval au-dessus du radier de l'ouvrage
- w est la hauteur de l'ouverture qui peut varier en fonction du temps
- L est la largeur de la vanne, supposé rectangulaire
- µ est le coefficient de débit et de transition noyé/dénoyé

Comme la vanne standard, celle-ci fonctionne seulement en charge.

Paramètres à fournir dans la ligne décrivant l'ouvrage : W, N°bief, Pm Section, Largeur, Cote du radier, Cote de mise en charge, Coefficient de débit [0.6], Nom.

9.17.3.5. T : déversoir trapézoïdal

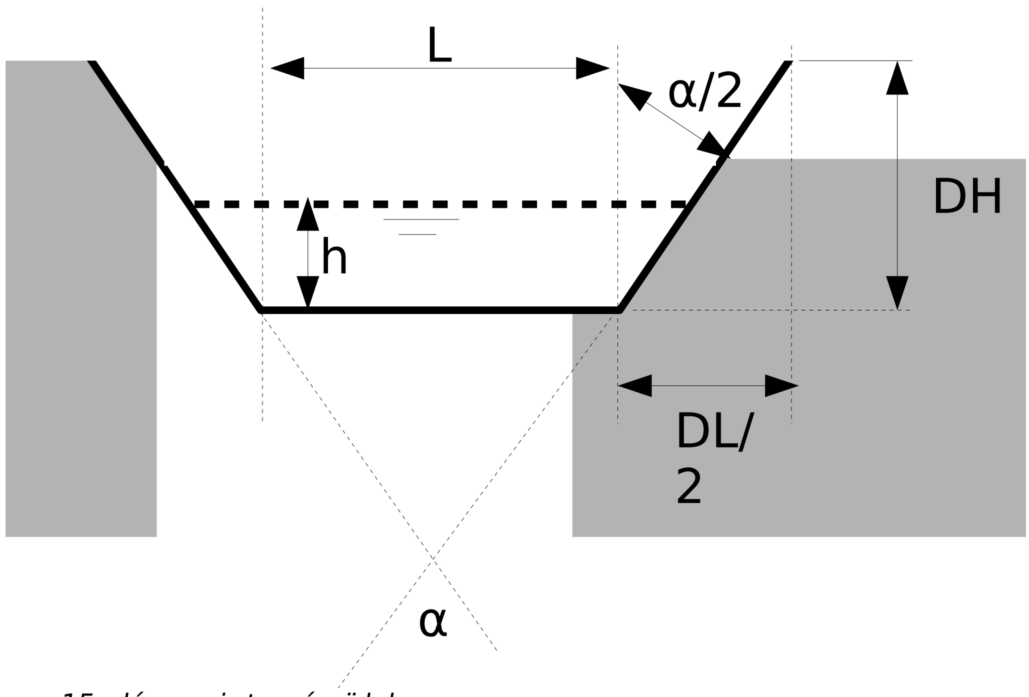


Figure 15: déversoir trapézoïdal

Les lois utilisées sont les lois du déversoir-orifice à surface libre adaptées à la section d'écoulement trapézoïdale S(h) de ce déversoir.

$$\begin{array}{lll} \text{surface libre dénoyée} & Q=\mu\sqrt{2g}\cdot S(h_1)h_1^{1/2} & \text{si } h_2 < h_{2min} \\ \text{surface libre noyée} & Q=\mu\frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{2g}\cdot S(h_2)\sqrt{h_1-h_2} & \text{si } h_2 \geq h_{2min} \end{array} \tag{9.5}$$

La transition noyé / dénoyé a lieu pour la valeur de h_2 qui réalise le maximum du débit avec la formule du régime noyé. Ce maximum de débit est réalisé pour une valeur h_{2min} de la hauteur d'eau aval qui est calculée de la façon suivante :

$$\begin{array}{c} h_{2min}=\frac{4\cdot B\cdot h_1-3\cdot L+\sqrt{\Delta}}{10\cdot B} \\ \text{avec } B=\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{ et } \Delta=9\cdot L^2+16\cdot B^2\cdot {h_1}^2+16\cdot B\cdot L\cdot h_1 \end{array} \tag{9.6}$$

On peut vérifier que cette expression converge bien vers $\frac{2}{3}\cdot h_1$ quand le trapèze tend vers un rectangle, c'est-à-dire quand $\frac{\alpha}{2}$ tend vers 0.

Paramètres à fournir dans la ligne décrivant l'ouvrage : T, N°bief, Pm Section, Largeur de base, Cote du déversoir, Cote de mise en charge, Coefficient de débit [0.4], tangente du demi-angle d'ouverture du déversoir (0.5*DL/DH), Nom.

9.17.3.6. B : buse circulaire fonctionnant comme un orifice.

C'est un orifice standard circulaire dont la section d'écoulement est la partie d'un disque sous la corde horizontale définie par le niveau d'eau amont.

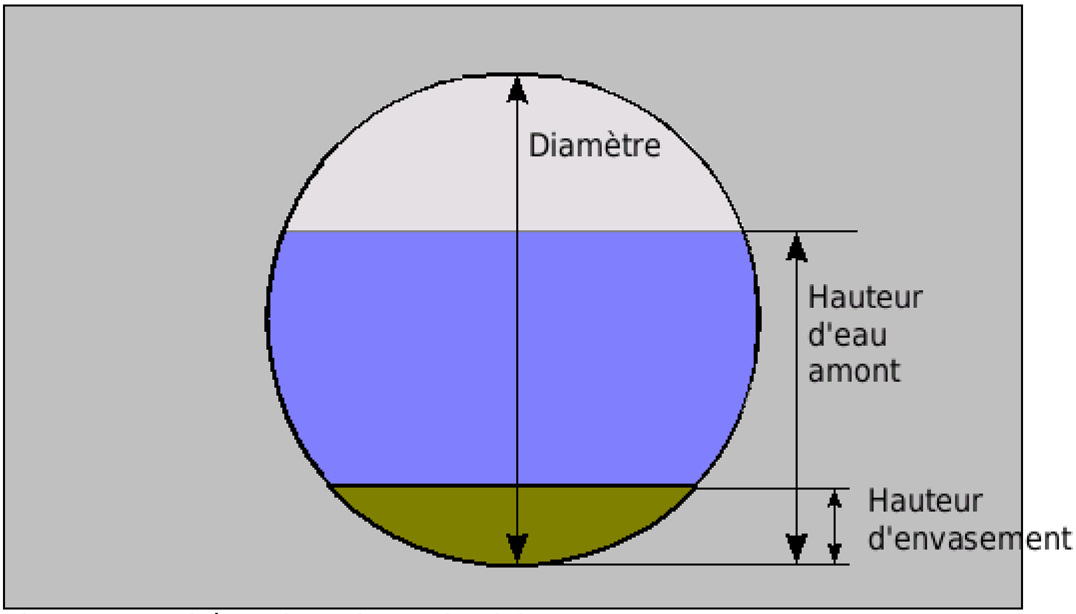


Figure 16 : schéma d'une buse circulaire

La loi de fonctionnement est la même que celle d'un déversoir-orifice rectangulaire dans laquelle on remplace le calcul de la section d'écoulement ($L.h_2$ ou $L.h_1$ selon le régime d'écoulement) par l'expression convenable pour une portion de disque. La loi de fonctionnement est donc identique à (9.5) dans laquelle h_{2min} est pris égal à $\frac{2}{3}.h_1$.

Paramètres à fournir dans la ligne décrivant l'ouvrage : B, N°Bief, Pm Section, Diamètre de la buse, cote du fond de la buse, Hauteur d'envasement [0.], coefficient de débit [0.4], Nom.

9.17.3.7. F : orifice-voûte fonctionnant comme un orifice.

Il s'agit d'un orifice en forme de voûte ou fer à cheval. Précisément C'est un rectangle surmonté d'une portion de cercle. Les caractéristiques physiques à fournir sont la largeur déversante, la cote de déversement, la cote du sommet de la partie rectangulaire et la cote du sommet de la partie voûtée. À partir de ces don-

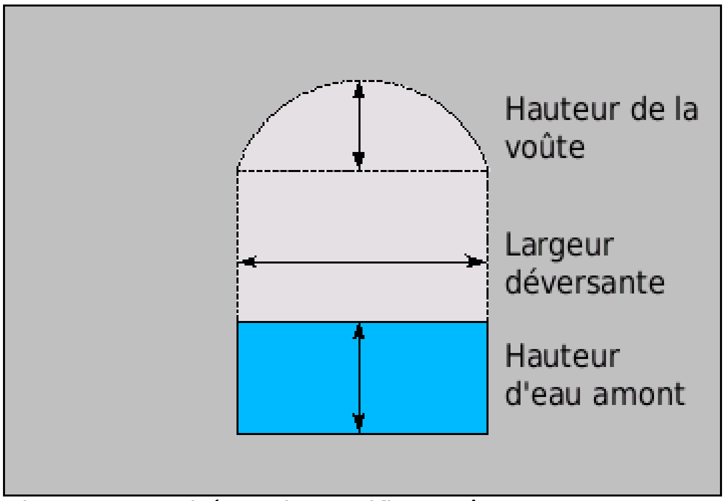


Figure 17 : schéma d'un orifice-voûte

nées il est possible de calculer le rayon de courbure de la voûte et la surface comprise sous un niveau d'eau quelconque.

La loi de fonctionnement est la même que pour un orifice (9.5) dans laquelle les calculs de $S(h)$ et de h_{2min} sont adaptés pour tenir compte de la forme de la voûte.

Paramètres à fournir dans la ligne décrivant l'ouvrage : F, N°Bief, Pm Section, Largeur déversante (P1), cote du fond, Cote du sommet de la partie rectangulaire (P3), coefficient de débit [0.4], Cote du sommet de la voûte (P5), Nom.

>>>> **Contrainte de cohérence** : la hauteur de la voûte doit être inférieure à une demie largeur : P5-P3 < 0,5 × P1. Autrement dit le rayon de courbure de la voûte doit être supérieur à la demie largeur, sinon la voûte se referme.

9.17.3.8. C : clapet ou porte à la mer

Cette modélisation des clapets a été supprimée dans Mage-8 au profit d'une modélisation par un orifice associé à une règle de régulation de type CLAPET. Voir la description du fichier VAR.

9.17.3.9. A : perte de charge singulière selon la formule de BORDA.

Si les 2 sections à la même abscisse qui constituent la singularité, sont sensiblement différentes, on peut utiliser ce type d'ouvrage pour tenir compte de la perte de charge générée en utilisant une perte de charge à la Borda.

Paramètres à fournir dans la ligne décrivant l'ouvrage : A, N° Bief, Pm Section, pas d'espace [0.1] utilisé pour évaluer l'élargissement, seuil à partir duquel on tient compte de l'élargissement [0.15], coefficient [1.], Nom.

9.17.3.10. X : ouvrage défini par l'utilisateur.

L'utilisateur dispose de 5 paramètres réels. Il doit écrire une routine Fortran de type FUNCTION nommée DEBITX ayant pour arguments les cotes amont et aval de l'ouvrage et la liste des paramètres de l'ouvrage telle qu'il l'a définie dans SIN :

FUNCTION DEBITX(Z1, Z2, P1, P2, P3, P4, P5).

Paramètres à fournir dans la ligne décrivant l'ouvrage : L, N° Bief, Pm Section, P1, P2, P3, P4, P5, Nom.

N.B. : Si Z1 < Z2 alors le sens de l'écoulement est inversé et MAGE appelle DEBITX sous la forme : – DEBITX(Z2, Z1, P1, P2, P3, P4, P5). Le débit calculé est donc négatif de sorte que l'utilisateur n'a pas à s'occuper des changements de sens de l'écoulement.

Le 2e paramètre (P2) peut disposer d'une programmation temporelle à l'aide du fichier VAR.

Ce type d'ouvrage n'est utilisable que si l'utilisateur dispose du code source de MAGE et d'un compilateur Fortran.

9.17.4. Les ouvrages de prélèvement de débit

9.17.4.1. P : pompe

Prélèvement ou injection ponctuelle de débit en une section donnée, éventuellement asservi à la cote de l'eau dans une section qui peut être différente de la précédente. Cet ouvrage ne crée aucune perte de charge, seulement une perte de débit.

Une pompe est supposée fonctionner en tout ou rien, sauf pendant les phases transitoires de démarrage et d'arrêt.

On a donc, pour une pompe installée entre deux sections consécutives i et i+1 :

$$\begin{cases} Q_{i+1} = Q_i - \delta q & \text{où } \delta q \text{ est le débit nominal de la pompe} \\ Z_{i+1} = Z_i \end{cases} \tag{9.7}$$

Notations :
- Q : débit à travers la section d'écoulement du chenal.
- Z : cote de l'eau

Paramètres à fournir dans la ligne décrivant l'ouvrage : P, N° Bief, Pm Section,
- Débit nominal de la pompe,
- Durée de montée en puissance en secondes (= temps de passage du débit nul au débit nominal [180.]),

- Durée d’arrêt en secondes (= temps de passage du débit nominal au débit nul [180.]),
- Cote de démarrage de la pompe en mètres,
- Cote d’arrêt (inférieure à la précédente) en mètres,
- Tirant d’eau de désamorçage en mètre [0.1],
- Numéro du bief de la section de référence,
- Numéro de la section de référence. [Si on ne fournit ni le numéro du bief ni celui de la section de référence le programme asservit la pompe à la cote dans laquelle elle est située],
- Nom.

Fonctionnement :

Le fonctionnement de la pompe est défini comme suit : la pompe démarre si la cote de l’eau dans la section de référence devient supérieure à la cote prescrite pour le démarrage et si aucune pompe située dans la même section n’est déjà en train de démarrer. La pompe s’arrête si la cote de l’eau dans la section de référence devient inférieure à la cote prescrite pour l’arrêt ou si le tirant d’eau dans la section de la pompe devient inférieur à la valeur minimale.

Si on veut que la pompe fonctionne en permanence il suffit de choisir une cote de démarrage inférieure à la cote minimale de l’eau. Dans ce cas il faut construire l’état initial à partir d’un état dans lequel la pompe ne fonctionne pas en faisant une transition qui force le démarrage de la pompe.

9.17.4.2. L : déversoir latéral

Prélèvement de débit en une section donnée selon une loi de déversoir rectangulaire. Cet ouvrage ne crée aucune perte de charge dans l’écoulement simulé.

Cet ouvrage réalise un prélèvement d’eau variable en fonction du niveau dans le chenal. Le débit prélevé est calculé de la même façon que pour un déversoir orifice (9.5). Si on ne connaît pas le niveau d’eau à l’aval du déversoir, il est supposé fonctionner en régime dénoyé. Si on prévoit une section de ré-injection du débit prélevé, la cote dans cette section fournit la cote aval du déversoir.

Notations :
- h est la hauteur d’eau amont au-dessus de l’ouvrage
- w est la hauteur de l’ouverture qui peut varier en fonction du temps
- L est la longueur du déversoir, supposé rectangulaire
- μ est le coefficient de débit

Paramètres à fournir dans la ligne décrivant l’ouvrage : L, N° Bief, Pm Section, Longueur de déversement, cote minimale de déversement, cote de mise en charge [9999.], coefficient de débit [0.4], paramètre vide [0.] (une valeur décimale doit être présente), numéro du bief de la section de ré-injection du débit prélevé [0], Pm de la section de ré-injection [0.], Nom.

Remarques :

Si on ne fournit pas de section de ré-injection, le débit prélevé est perdu. Ce débit est calculé selon une loi de déversoir-orifice qui est toujours dénoyé (il n’y a pas de cote aval).

Si on fournit une section de ré-injection, le débit prélevé est injecté sous forme d’un apport latéral. Ce débit est calculé selon une loi de déversoir-orifice qui peut être noyé (on tient compte de la cote aval qui est donc celle de la section de ré-injection.

Si on fournit une section de ré-injection, le déversement n’est possible que si la cote dans la section de ré-injection est inférieure à celle de la section du déversoir latéral. Si la cote dans la section de ré-injection est supérieure à la cote de la section du déversoir latéral, il y a retour vers celle-ci, selon la même loi de déversement.

Cet ouvrage permet donc de réaliser un transfert entre biefs mais cela ne supprime pas la contrainte de connexité du réseau (pas de séparation du réseau de biefs en parties non connectées géométriquement).

Comme on ne tient pas compte de la perte de charge que crée un déversoir latéral, il faut que le débit prélevé soit petit devant le débit dans le bief afin que cette perte de charge puisse être considérée comme négligeable.

9.18. Fichier VAR (texte)

Les ouvrages programmables par VAR (fichier texte) sont les vannes, les déversoirs et orifices, les clapets, les pompes (Marche/arrêt), ainsi que les ouvrages définis par l'utilisateur (paramètre P2).

On peut programmer les ouvrages mobiles selon deux modalités :

– soit par une loi donnant la variable mobile (ouverture de la vanne par exemple) en fonction d'un paramètre (le temps par exemple) ;
– soit en définissant des règles de comportement (vanne à niveau amont constant par exemple).

Dans tous les cas la définition d'une loi ou d'une règle commence toujours par une ligne avec un caractère $ en 1ère colonne suivi du nom de l'ouvrage à réguler (le même que celui défini dans SIN) puis du type de la règle à utiliser, puis du nom de la règle (à choisir par l'utilisateur, ce nom sera utilisé dans la trace des mouvements d'ouvrage écrite dans le fichier OUTPUT) :

- WDT : variable fonction du temps (défaut).
- WDZ : variable fonction de la cote.
- Clapet : ouverture d'orifice ou de vanne à sens unique (sens débit positif).
- Zamont : vanne ou orifice à niveau amont constant.
- Zaval : vanne ou orifice à niveau aval constant.
- Qmax : prescription de débit maximum.
- Z2Q : prescription d'un niveau amont en fonction d'un intervalle de débit.
- Z2T : prescription d'un niveau amont en fonction du temps.
- Turbine : simulation d'éclusées énergétiques.
- Q2Q : prescription d'un débit aval en fonction d'un débit.
- Q2T : prescription d'un débit aval en fonction du temps.

NB 1 : comme pour tous les fichiers de données de MAGE, toute ligne qui commence par une étoile (*) est considérée comme un commentaire et ignorée lors de la lecture.

NB 2 : une ligne de consigne ne doit pas faire plus de 120 caractères.

NB 3 : le type de règle n'est pas sensible à la casse.

NB 4 : le fichier OUTPUT contient à chaque pas de temps une trace des mouvements et positions des ouvrages régulés. C'est cette information-là qu'il faut consulter pour vérifier que la régulation a bien fait ce qu'on attendait d'elle. Ces données peuvent être extraites ou filtrées à l'aide d'outils standard comme *grep* pour une lecture et une interprétation plus aisées.

9.18.1. Modification en cours de simulation

L'utilisateur a la possibilité de modifier le fichier VAR en cours d'exécution : il suffit d'en créer une copie sous le nom « VAR » et de modifier cette copie. Après chaque pas de temps MAGE teste l'existence de ce fichier. Sil existe il est lu comme le fichier VAR a été lu au lancement de MAGE puis détruit afin de pouvoir détecter une nouvelle modification des commandes.

Attention : Les informations transmises par le fichier VAR qui ne sont pas reprises dans le fichier temporaire nommé « VAR » sont perdues.

9.18.2. Programmation temporelle : règle WDT

```
Format sur une seule ligne :
$ nom_ouvrage WDT nom_règle décalage_temporel
```

La lecture se fait en utilisant l'espace comme séparateur.

décalage_temporel est un réel : ne pas oublier le point décimal.

Dans les lignes qui suivent la ligne $ on donne la loi WDT sous la forme d'une série de couples (temps, valeur) avec un couple par ligne. On peut donner autant de couples (temps, valeur) qu'on le veut.

Les formats possibles pour le temps sont « JJJ : HH : MM » ou un nombre de minutes (réel avec point décimal). Pour la valeur, le format est toujours un réel avec point décimal.

Selon le type d'ouvrage, « valeur » correspond à :

- seuil mobile (D) : cote de déversement
- orifice à ouverture variable (O) : cote de mise en charge
- vannes (V et W) : cote de mise en charge
- pompe (P) : une valeur positive pour forcer la mise en route et une valeur négative pour forcer l'arrêt
- ouvrage défini par l'utilisateur (X) : paramètre P2

Les interpolations faites par MAGE sont linéaires dans l'intervalle de définition de la consigne. En dehors de cet intervalle, MAGE prolonge continûment la consigne par une valeur constante.

9.18.3. Programmation fonction d'un niveau : règle WDZ

```
Format sur une seule ligne :
$ nom_ouvrage WDZ nom_règle Bief_référence Pk_référence
```

La lecture se fait en utilisant l'espace comme séparateur

Bief_référence est le numéro du bief (entier) et Pk_référence l'abscisse (réel) du point de mesure du niveau. Par défaut le niveau est mesuré dans la section amont de l'ouvrage.

Dans les lignes qui suivent la ligne $ on donne la loi sous la forme d'une série de couples (niveau, valeur) avec un couple par ligne. On peut donner autant de couples (niveau, valeur) que l'on veut.

Pour le niveau et la valeur, le format est toujours un réel avec point décimal.

Selon le type d'ouvrage, « valeur » correspond à :
- seuil mobile (D) : cote de déversement
- orifice à ouverture variable (O) : cote de mise en charge
- vannes (V et W) : cote de mise en charge
- ouvrage défini par l'utilisateur : paramètre P2

Les interpolations faites par MAGE sont linéaires dans l'intervalle de définition de la consigne. En dehors de cet intervalle, MAGE prolonge continûment la consigne par une valeur constante.

9.18.4. « Clapet » : régulation pour simuler un clapet anti-retour

```
Format sur une seule ligne :
$ nom_ouvrage Clapet nom_règle dt
```

La lecture se fait en utilisant l'espace comme séparateur. « nom_ouvrage » doit être de type orifice. « dt » est un réel (donc avec point décimal) positif ou nul.

Fonctionnement : le clapet se ferme quand le niveau aval devient supérieur au niveau amont. La durée de la fermeture est donnée par le pas de temps dt (en secondes). Si ce pas de temps est nul ou absent, c'est la valeur par défaut 60 secondes qui est utilisée.

Pour un orifice mobile régulé en tant que clapet anti-retour, la cote de mise en charge actuelle correspond à la position « fermé » du clapet et doit être fixée à une très petite valeur non nulle (ouverture de 1 mm par exemple) et la cote de mise en charge maximale correspond à l'ouverture de l'orifice pour la position « ouvert » du clapet.

9.18.5. « Zamont » : régulation de type niveau amont constant

```
Format sur une seule ligne :
$ nom_ouvrage Zamont nom_règle Bief_référence Pk_référence Zref Gain Puissance
Vitesse_manœuvre
```

La lecture se fait en utilisant l'espace comme séparateur.

L'ouvrage désigné par nom_ouvrage doit être de type orifice ou vanne.

L'objectif est de maintenir constant à la valeur de référence Zref (réel positif) le niveau dans la section de référence (n° bief Bief_référence (entier) et abscisse locale Pk_référence (réel)). Cela est réalisé à l'aide d'un régulateur proportionnel dont le gain est donné par la variable *Gain* (réel) et l'exposant par la variable *Puissance* (réel positif).

Le paramètre *Vitesse_manœuvre* (réel, unité seconde/mètre) permet de contrôler la durée de la correction ; si ce paramètre n'est pas fourni la valeur par défaut 1 seconde/mètre est utilisée (manœuvre instantanée).

Il n'y a pas d'autre valeur par défaut.

NB : il reste à la charge de l'utilisateur de s'assurer que la section de référence se trouve bien à l'amont de l'ouvrage. Cela signifie que l'on suppose que pour faire monter le niveau dans la section de référence il faut fermer la vanne et non l'ouvrir.

9.18.6. « Zaval » : régulation de type niveau aval constant

```
Format sur une seule ligne :
$ nom_ouvrage Zaval nom_règle Bief_référence Pk_référence Zref Gain Puissance
Vitesse_manœuvre
```

La lecture se fait en utilisant l'espace comme séparateur.

L'ouvrage désigné par nom_ouvrage doit être de type orifice ou vanne.

L'objectif est de maintenir constant à la valeur de référence Zref (réel positif) le niveau dans la section » de référence (n° bief Bief_référence (entier) et abscisse locale *Pk_référence* (réel)). Cela est réalisé à l'aide d'un régulateur proportionnel dont le gain est donné par la variable *Gain* (réel) et l'exposant par la variable *Puissance* (réel positif).

Le paramètre *Vitesse_manœuvre* (réel, unité seconde/mètre) permet de contrôler la durée de la correction ; si ce paramètre n'est pas fourni la valeur par défaut 1 seconde/mètre est utilisée (manœuvre instantanée).

Il n'y a pas d'autre valeur par défaut.

NB : il reste à la charge de l'utilisateur de s'assurer que la section de référence se trouve bien à l'aval de l'ouvrage. Cela signifie que l'on suppose que pour faire monter le niveau dans la section de référence il faut ouvrir la vanne et non la fermer.

9.18.7. « Qmax » : régulation de type débit maximum prescrit avec débit réservé associé

```
Format sur une seule ligne :
$ nom_ouvrage Qmax nom_règle Bief_référence Pk_référence Qmax Q_réservé Gain
Puissance Vitesse_manœuvre T1 T2
```

La lecture se fait en utilisant l'espace comme séparateur

L'ouvrage désigné par nom_ouvrage doit être de type orifice ou vanne

L'objectif est de réguler des vannes de dérivation de débit en laissant passer à travers la vanne le débit nécessaire, pour que le débit dans la section de référence (n° bief Bief_référence (entier) et abscisse locale Pk_référence (réel)) ne dépasse pas un débit maximum prescrit (Qmax, réel) tout en laissant au moins le débit réservé (Q_réservé, réel).

Remarque : cette règle est identique à la variante QMAX2 de Mage-7.

Principe de la régulation :

- si Qref < Qmax : la vanne est fermée ;
- si Qref > Qmax : on ouvre la vanne à l'aide d'un régulateur proportionnel dont le gain est donné par la variable *Gain* (réel) et l'exposant par la variable *Puissance* (réel positif) ;
- si le débit évolue dans le bon sens, on ne fait rien.

Le paramètre *Vitesse_manœuvre* (réel, unité seconde/mètre) permet de contrôler la durée de la correction ; si ce paramètre n'est pas fourni la valeur par défaut 1 seconde/mètre est utilisée (manœuvre instantanée).

Les temps T1 et T2, donnés sous la forme JJJ:HH:MM:SS, permettent de définir une plage de temps en dehors de laquelle la loi QMAX est désactivée.

Il n'y a pas d'autre valeur par défaut sauf pour les dates T1 (−∞) et T2 (+∞) de sorte qu'on peut omettre ces deux paramètres si la loi QMAX doit être toujours activée.

9.18.8. « Z2Q » : régulation de type niveau amont prescrit en fonction du débit

```
Format sur une seule ligne :
$ nom_ouvrage Z2Q nom_règle Bief_référence Pk_référence Q1 Z1 Q2 Z2 Gain
Puissance Vitesse_manœuvre T1 T2
```

La lecture se fait en utilisant l'espace comme séparateur.

L'ouvrage désigné par nom_ouvrage doit être de type orifice ou vanne.

L'objectif est de maintenir le niveau dans la section de référence (n° bief Bief_référence (entier) et abscisse locale Pk_référence (réel)) à la valeur de référence Zref calculée par interpolation linéaire entre Z1 et Z2. Le débit est observé à l'entrée du bief qui contient la section de référence. Si le débit n'est pas dans l'intervalle [Q1 ; Q2] la règle ne fait rien.

Comme pour les précédentes règles, la régulation est réalisée à l'aide d'un régulateur proportionnel dont le gain est donné par la variable *Gain* (réel) et l'exposant par la variable *Puissance* (réel positif).

Le paramètre *Vitesse_manœuvre* (réel, unité seconde/mètre) permet de contrôler la durée de la correction ; si ce paramètre n'est pas fourni la valeur par défaut 1 seconde/mètre est utilisée (manœuvre instantanée).

Les temps T1 et T2, donnés sous la forme JJJ:HH:MM:SS, permettent de définir une plage de temps en dehors de laquelle la loi Z2Q est désactivée.

Il n'y a pas d'autre valeur par défaut, sauf pour T1 (−∞) et T2 (+∞) de sorte qu'on peut omettre ces deux paramètres si la loi Z2Q doit être toujours activée.

Si une seule date est fournie, celle-ci est supposée être T1, l'intervalle est alors [T1,+∞[.

NB : il reste à la charge de l'utilisateur de s'assurer que la section de référence se trouve bien à l'amont de l'ouvrage. Cela signifie que l'on suppose que pour faire monter le niveau dans la section de référence il faut fermer la vanne et non l'ouvrir.

En pratique pour suivre une courbe Z(Q) il faut définir autant de règles qu'il y a de tronçons linéaires dans Z(Q). Il est, a priori, préférable que les tronçons ne se chevauchent pas. Dans ce cas, une seule des règles Z2Q pour un même ouvrage est appliquée à un moment donné (la dernière).

9.18.9. « Z2T » : régulation de type niveau amont prescrit en fonction du temps

```
Format sur une seule ligne :
$ nom_ouvrage Z2T nom_règle Bief_référence Pk_référence T1 Z1 T2 Z2 Gain
Puissance Vitesse_manœuvre
```

La lecture se fait en utilisant l'espace comme séparateur.

L'ouvrage désigné par nom_ouvrage doit être de type orifice ou vanne.

Les temps T1 et T2 sont donnés sous la forme JJJ:HH:MM:SS

L'objectif est de maintenir le niveau dans la section de référence (n° bief Bief_référence (entier) et abscisse locale Pk_référence (réel)) à la valeur de référence Zref calculée par interpolation linéaire entre Z1 et Z2. Le fonctionnement est le suivant :

- si t ≤ T1 ou si t ≥ T2 alors on ne fait rien ;
- si T1 < t < T2 alors la cote de référence est interpolée entre Z1 et Z2.

Comme pour les précédentes règles, la régulation est réalisée à l'aide d'un régulateur proportionnel dont le gain est donné par la variable *Gain* (réel) et l'exposant par la variable *Puissance* (réel positif).

Le paramètre *Vitesse_manœuvre* (réel, unité seconde/mètre) permet de contrôler la durée de la correction ; si ce paramètre n'est pas fourni la valeur par défaut 1 seconde/mètre est utilisée (manœuvre instantanée).

Il n'y a pas d'autre valeur par défaut.

NB 1 : il reste à la charge de l'utilisateur de s'assurer que la section de référence se trouve bien à l'amont de l'ouvrage. Cela signifie que l'on suppose que pour faire monter le niveau dans la section de référence il faut fermer la vanne et non l'ouvrir.

NB 2 : l'utilisateur doit penser à gérer le fonctionnement de l'ouvrage en dehors de la plage de transition, au besoin en définissant plusieurs règles Z2T sur des intervalles des temps adjacents.

NB 3 : comme les autres règles de régulation, l'efficacité de celle-ci dépend de l'ordre dans lequel les règles de régulation sont définies. Si plusieurs règles différentes manœuvrent le même ouvrage, c'est la dernière qui l'emporte.

9.18.10. « Turbine » : régulation de type production électrique

```
Format sur une seule ligne :
$ nom_ouvrage TURBINE nom_règle Bief_Pt-Réglage Pk_Pt-Réglage Q1 Z1 Q2 Z2
dt_close dt_open Q_Pt-Réglage_Min Z_Pt-Réglage_Min
```

La lecture se fait en utilisant l'espace comme séparateur.

L'ouvrage désigné par nom_ouvrage doit être de type orifice ou vanne.

Le point de réglage est défini par son numéro de bief et son abscisse (Pk).

Le fonctionnement est le suivant :

1. si le débit au point de réglage n'est pas compris entre Q1 et Q2, alors on ne fait rien ;
2. si le débit est compris entre Q1 et Q2 on calcule une cote de référence au point de réglage par interpolation linéaire entre Z1 et Z2 ;
   a. si la cote au point de réglage est inférieure à la cote minimale autorisée en ce point (Z_Pt-Réglage_Min) + 5 cm ou si le débit au point de réglage est inférieur à 2 fois le débit minimum autorisé en ce point (Q_Pt-Réglage_Min), et si l'ouvrage est ouvert
   alors on ferme l'ouvrage, la manœuvre de fermeture étant définie pour durer dt_close
   b. sinon si la cote au point de réglage est supérieure à la cote de référence et si l'ouvrage est fermé alors on ouvre l'ouvrage, la manœuvre d'ouverture étant définie pour durer dt_open
   c. dans les autres cas on ne fait rien.

9.18.11. « Q2Q » : régulation de type débit aval prescrit en fonction d'un débit

```
Format sur une seule ligne :
$ nom_ouvrage Q2Q nom_règle Bief_référence Pk_référence Q1 QQ1 Q2 QQ2 Gain
Puissance Vitesse_manœuvre T1 T2
```

La lecture se fait en utilisant l'espace comme séparateur.

L'ouvrage désigné par nom_ouvrage doit être de type orifice ou vanne.

L'objectif est d'imposer le débit lâché par l'ouvrage en fonction du débit dans la section de référence (n° bief Bief_référence (entier) et abscisse locale Pk_référence (réel)). Le débit est observé dans la section de référence. S'il n'est pas dans l'intervalle [Q1 ; Q2] la règle ne fait rien. Sinon le débit imposé est calculé par interpolation linéaire entre Q1 et Q2.

Comme pour les précédentes règles, la régulation est réalisée à l'aide d'un régulateur proportionnel dont le gain est donné par la variable *Gain* (réel) et l'exposant par la variable *Puissance* (réel positif).

Le paramètre *Vitesse_manœuvre* (réel, unité seconde/mètre) permet de contrôler la durée de la correction ; si ce paramètre n'est pas fourni la valeur par défaut 1 seconde/mètre est utilisée (manœuvre instantanée).

Les temps T1 et T2, donnés sous la forme JJJ:HH:MM:SS, permettent de définir une plage de temps en dehors de laquelle la loi Z2Q est désactivée.

Il n'y a pas d'autre valeur par défaut, sauf pour T1 ($-\infty$) et T2 ($+\infty$) de sorte qu'on peut omettre ces deux paramètres si la loi Q2Q doit être toujours activée.

NB : il reste à la charge de l'utilisateur de s'assurer que la section de référence se trouve bien à l'amont de l'ouvrage.

En pratique pour suivre une courbe Q(Q) il faut définir autant de règles qu'il y a de tronçons linéaires dans Q(Q). Il est, a priori, préférable que les tronçons ne se chevauchent pas. Dans ce cas, une seule des règles Q2Q pour un même ouvrage est appliquée à un moment donné.

9.18.12. « Q2T » : régulation de type débit aval prescrit en fonction d'un temps

```
Format sur une seule ligne :
$ nom_ouvrage Q2Q nom_règle T1 Q1 T2 Q2 Gain Puissance Vitesse_manœuvre
```

La lecture se fait en utilisant l'espace comme séparateur.

L'ouvrage désigné par nom_ouvrage doit être de type orifice ou vanne.

L'objectif est d'imposer le débit lâché par l'ouvrage en fonction du temps. Si le temps courant n'est pas dans l'intervalle [T1 ; T2] la règle ne fait rien. Sinon le débit cible est calculé par interpolation linéaire entre Q1 et Q2.

Comme pour les précédentes règles, la régulation est réalisée à l'aide d'un régulateur proportionnel dont le gain est donné par la variable *Gain* (réel) et l'exposant par la variable *Puissance* (réel positif).

Le paramètre *Vitesse_manœuvre* (réel, unité seconde/mètre) permet de contrôler la durée de la correction ; si ce paramètre n'est pas fourni la valeur par défaut 1 seconde/mètre est utilisée (manœuvre instantanée).

Il n'y a pas d'autre valeur par défaut.

En pratique pour suivre une courbe Q(t) il faut définir autant de règles qu'il y a de tronçons linéaires dans Q(t). Il est, a priori, préférable que les tronçons ne se chevauchent pas. Dans ce cas, une seule des règles Q2T pour un même ouvrage est appliquée à un moment donné.

9.19. Les fichiers d'entrée non référencés dans REP

9.19.1. Fichier param_iniper

Ce fichier contrôle les itérations pour le calcul de la ligne d'eau initiale, en particulier dans le cas d'un réseau maillé. Il contient 3 lignes avec une valeur chacune.

Ligne 1 : *Alpha*, de type réel sur 10 caractères (point décimal obligatoire), coefficient correcteur de la répartition des débits aux défluents ; plus alpha est voisin de zéro moins la correction est forte et donc grand le nombre d'itérations nécessaires ; valeur par défaut : 0,25.

Ligne 2 : *epsilon*, de type réel sur 10 caractères (point décimal obligatoire), test d'arrêt pour les itérations en cas de réseau maillé ; valeur par défaut : 0,01.

Ligne 3 : *itemax*, de type entier sur 3 caractères, le nombre maximal d'itérations dans le cas d'un réseau maillé (pour le calcul de la répartition des débits aux défluents) ; valeur par défaut : 99.

Si le fichier **param_iniper** n'existe pas, il est créé avec les valeurs par défaut.

9.19.2. Fichier param_torrentiel

Ce fichier contrôle le traitement des passages en torrentiel. Il contient 4 lignes avec une valeur numérique chacune.

Ligne 1: *relax_a*, seuil inférieur sur le nombre de Froude ; valeur par défaut : 0,85.

Ligne 2: *relax_b*, seuil supérieur sur le nombre de Froude ; valeur par défaut : 1,20.

Ligne 3: *valeur de coupure* ; valeur par défaut : 0,0.

Ligne 4: *nombre de Courant* pour les périodes où une part de l'écoulement est torrentielle ; valeur par défaut : max(5,0 ; Crmax (NUM)).

Pour un point de calcul où le nombre de Froude est compris entre *relax_a* et *relax_b*, le terme d'inertie $\beta \cdot Q^2/S$ est multiplié par un coefficient de relaxation qui décroît de 1 à la valeur de coupure.

Si le fichier **param_torrentiel** n'existe pas, il est créé avec les valeurs par défaut.

9.20. Les fichiers de sortie

9.20.1. Fichier TRA : listing de MAGE

Il reprend un certain nombre d'informations à l'initialisation (pas de temps, nombre de biefs, de sections, de sections singulières, etc.). À chaque pas de temps d'écriture, TRA fournit le nombre d'itérations, pour chaque nœud de chaque bief numéroté selon l'ordre de NET, le débit et la cote ainsi que la surface inondée si elle n'est pas nulle.

Le débit et la cote en un nœud amont (resp. aval) pour un bief donné sont le débit et la cote dans la première (resp. la dernière) section du bief. Il s'ensuit que pour un même nœud mais pour des biefs différents, on peut avoir des débits différents. C'est toujours le cas pour les confluents et les défluents pour lesquels la somme de débits entrant doit être égale à la somme des débits sortant.

Si le modèle contient des ouvrages, TRA fournit aussi à chaque pas de temps d'écriture un descriptif de l'état du fonctionnement des ouvrages : situation, cotes amont et aval, débit total dans la section, débit partiel sur l'ouvrage élémentaire, régime de fonctionnement.

À la fin de TRA on trouve une estimation de l'écart entre le débit calculé passant sur chaque ouvrage élémentaire et le débit théorique correspondant obtenu à partir des cotes amont et aval de l'ouvrage.

TRA contient également les messages d'erreur fatale.

9.20.2. Fichier BIN : lignes d'eau calculées

Fichier binaire créé par MAGE non consultable directement et destiné au programme Mage_Extraire. Il contient, à chaque pas de temps d'écriture, le temps, les débits, les cotes et les vitesses. Ces résultats sont stockés selon un pas de temps spécial fourni dans le fichier NUM.

9.20.3. Fichier ERR : erreurs non fatales

Fichier texte, créé par MAGE, contenant les messages d'erreur non fatale.

Le fichier ERR n'est créé que s'il apparaît dans REP. Dans le cas contraire les messages d'erreur non fatale ne sont pas transmis.

Le fichier est réinitialisé tous les 10 000 messages d'avertissement, en particulier le signalement des nombres de Froude supérieurs à 1, pour éviter de générer des fichiers trop gros et donc inexploitables dans certaines situations comme les passages localisés en torrentiel.

9.20.4. Fichier OUTPUT : affichage console

Ce fichier texte donne la même chose que ce qui apparaît dans la console d'exécution de MAGE mais avec la totalité des pas de temps. Le fichier est cependant réinitialisé toutes les 100 000 lignes pour éviter de générer des fichiers trop gros et donc inexploitables dans certaines situations comme les passages localisés en torrentiel.

En cas de régulation automatique (utilisation d'un fichier VAR), le fichier OUTPUT contient à chaque pas de temps une trace des mouvements et positions des ouvrages régulés. C'est cette information-là qu'il faut consulter pour vérifier que la régulation a bien fait ce qu'on attendait d'elle. Ces données peuvent être extraites ou filtrées à l'aide d'outils standard comme *grep* pour une lecture et une interprétation plus aisée.

9.20.5. Fichier Mage_fin.ini : ligne d'eau finale

Ce fichier texte contient la ligne d'eau à l'instant final de la simulation, même quand celle-ci est interrompue par modification de la date de fin de simulation (par exemple comme le fait PamHyr). Le format de ce fichier permet d'en utiliser une copie comme fichier d'état initial (INI).

Mage_fin.ini contient d'autres informations que simplement les niveaux et débits en chaque point de calcul. En particulier on y trouve le nombre de Froude, la largeur totale, la répartition du débit entre lits mineur et majeurs actifs, la débitance, etc.

Si on utilise MAGE pour calculer une ligne d'eau permanente, c'est un fichier de résultats détaillés sur la ligne d'eau.

NB : Ne pas utiliser directement Mage_fin.ini comme fichier INI dans REP puisqu'il sera écrasé en cours de simulation. Pour le réutiliser comme fichier INI il faut en faire une copie sous un autre nom et mentionner cette copie dans REP.

9.20.6. Fichier Mage_ini.ini : ligne d'eau initiale

Ce fichier contient la ligne d'eau initiale quand celle-ci est calculée par MAGE.

9.20.7. Fichier Mage_fin.sin : état des ouvrages à l'instant final

Ce fichier contient la description des ouvrages à l'instant final. Il a le même format que le fichier SIN ce qui permet d'en utiliser une copie pour initialiser une nouvelle simulation. Bien entendu ce fichier est utile dans le cas où on emploie des ouvrages mobiles.

NB : Ne pas utiliser directement Mage_fin.sin comme fichier SIN dans REP puisqu'il sera écrasé en cours de simulation. Pour le réutiliser comme fichier SIN il faut en faire une copie sous un autre nom et mentionner cette copie dans REP.

9.20.8. Fichiers CSV : valeurs d'une variable en un point donné

Voir *Enregistrement à la volée de résultats ponctuels*

10. Les principales différences entre Mage-8 et Mage-7

Mage-8 est une réécriture quasi complète de Mage. Cette réécriture a été rendue nécessaire d'une part pour améliorer la maintenabilité du code et d'autre part pour permettre l'implémentation de la méthode ISM pour la modélisation des débordements en lits composés.

10.1. Topologie et géométrie

Le fichier TAL a été abandonné au profit d'une représentation de la géométrie en 3D : chaque profil en travers est représenté par une suite de points définis par leurs coordonnées géographiques (X,Y,Z).

Ce changement permet une représentation bien plus fidèle de la géométrie. En particulier Mage-8 n'est plus contraint par la limite de 24 points par profil en travers. De plus ce format permet de distinguer le lit majeur droit du lit majeur gauche ce qui n'était pas possible avec le fichier TAL alors que c'est nécessaire pour ISM.

Les données topologiques (le réseau hydrographique) et les données géométriques (la forme des profils en travers) sont maintenant séparées. La topologie est fournie par le fichier NET tandis que la géométrie d'un bief est définie par un fichier au format ST. Il y a ainsi un fichier de géométrie par bief.

Des tests supplémentaires de vérification de la géométrie ont été implémentés. Par exemple Mage-8 recherche les lits majeurs avec des points plus bas que la cote de débordement (voir l'option de la ligne de commande -fp).

10.2. Modélisation des débordements en lits composés

Mage-8 s'est enrichi de la méthode ISM qui permet de calculer plus précisément la répartition du débit total dans une section entre les 3 principales sous-sections : lit mineur et lits majeurs actifs gauche et droit.

10.3. Pilotage des calculs

Pour la résolution des équations discrètes non-linéaires, seules les itérations de Newton-Raphson et ses variantes ont été conservées. Les autres méthodes, moins robustes, n'étaient plus utilisées par personne depuis longtemps.

Les paramètres par défaut du test de convergence des itérations ont été modifiés pour obtenir un test plus contraignant :

- La valeur de ε a été ramenée de 10^{-5} à 10^{-9}.
- Le test d'arrêt des itérations prend en compte le résidu en plus des écarts sur les débits et cotes ; on force ainsi le résidu à devenir vraiment petit. Cela a pour conséquence, en général, d'augmenter le nombre d'itérations, mais c'est le prix de la qualité des résultats.
- Le comportement de Mage en cas de bouclage des itérations a été rendu plus strict.

10.4. Ouvrages

Les ouvrages élémentaires « clapet » et « clapet inversé » ont été supprimés. Le clapet inversé n'était jamais utilisé. Le clapet (ou porte à flot) est remplacé par une règle de régulation qui permet une fermeture et une ouverture progressives ce qui la modélisation plus robuste.

10.5. Transport solide par charriage

Un module de transport solide par charriage avec évolution des fonds a été implémenté.

11. Options de la ligne de commande de Mage-8

On peut compiler Mage-8 en 2 variantes, la variante standard avec toutes ses options et la variante qui mime Mage-7 et qui peut être utilisée avec PamHyr à la place de Mage-7.

11.1. Variante standard

Contrairement aux versions précédentes, Mage-8 utilise intensément les options de la ligne de commande.
Pour retrouver toutes ces options il suffit de lancer Mage-8 avec l'option -h :

```
$mage8 -h
```

On obtient le résultat suivant :

```
Options de la ligne de commande de MAGE
Syntaxe : mage [options] REPname pour lancer une simulation avec REPname comme fichier REP
          mage -v pour afficher le numéro de version et quitter
          mage -h pour afficher cette aide et quitter
          mage -t pour exécuter les tests unitaires et quitter

Options disponibles :
   -D=workDir avec workDir le chemin où se trouve REPname
        si workDir n'est pas spécifié c'est le répertoire courant

   -l=type_resultat pour utiliser MAGE comme solveur externe à partir d'un autre code
        enregistre une sélection des résultats dans un fichier binaire nommé Mage_Results
        valeurs possibles pour type_resultat : ENV, FIN|END
        valeur par défaut : ENV

   -r pour utiliser le mode fichier BIN réduit
        utile pour les longues simulations destinées à Adis-TS

   -s pour utiliser le mode silencieux : pas d'affichage à l'écran

   -cpu=n avec n le nombre de cpu à utiliser en mode parallèle ; valeur par défaut : 1

   -i=[1|0|-1|-2] pour choisir entre ISM et Debord :
        1 = ISM
        0 = Debord (valeur par défaut)
       -1 = on corrige Debord par ISM si ISM réussit, sinon on garde Debord
       -2 = on bascule sur Debord si ISM échoue

   -LC=n pour utiliser en interne une représentation en largeurs-cotes, comme dans Mage-7
         par défaut Mage-8 utilise la représentation XYZ des fichiers de géométrie
       n=0 : même calcul de représentation largeurs-cotes que dans Mage-7
       n=1 : calcul en utilisant largeur_XYZ(), perimetre_XYZ() et section_XYZ() sur le profil 3D
       n=2 : calcul en utilisant largeur_XYZ(), perimetre_XYZ() et section_XYZ() sur la projection
             abscisses-cotes du profil original (dans un monde parfait 2 == 0)

    Mode de calcul de la vitesse à l'interface pour ISM :
   -w=x pour que ISM utilise V_interface_weighted avec la pondération x ; 0 ≤ x ≤ +1
        V_int = x*V_mc + (1-x)*V_fp
   -u=x pour que ISM utilise V_interface_upstream avec la correction x ; -1 ≤ x ≤ +1
        V_int = (1+x)*V_upstream
   -d=x pour que ISM utilise V_interface_downstream avec la correction x ; -1 ≤ x ≤ +1
        V_int = (1+x)*V_downstream
   -b=x pour que ISM utilise V_interface_biggest avec la correction x ; -1 ≤ x ≤ +1
        V_int = (1+x)*max(V_mc,V_fp)
   -y   pour que ISM utilise V_interface_yen
        V_int = (L_mc*V_fp + L_fp*V_mc) / (L_mc+L_fp)
    les options -w, -u, -d, -b et -y sont mutuellement exclusives
    si plusieurs de ces options sont utilisées, seule la dernière est appliquée
```

```
    -z[=n] où n est un nombre de 0 à 9, valeur par défaut : 3. Indique à Mage de créer une
           archive de la simulation au format tar.xz sous Linux et 7z sous MS-Windows
           avec le taux de compression n.
           Dépendances : xz sous Linux et 7-zip sous MS-Windows.

    -c=n où n a pour valeur 0, 1 ou 2 pour définir la prise en compte du charriage :
           n = 0 -> pas de charriage, les données sédimentaires sont ignorées
           n = 1 -> avec charriage, les données sédimentaires sont lues point par point
                    dans le fichier ST
           n = 2 -> avec charriage, les données sédimentaires sont lues dans un fichier SED
                    définies par tronçons. Chaque couche sédimentaire est définie alors par
                    son épaisseur et non par la cote de son plancher

    -fp=n où n a pour valeur 0 (défaut), 1, 2 ou 3 pour définir comment il faut traiter
          les profils dont un lit majeur a des points situés plus bas que la cote de débordement.
          Pour le lit majeur gauche [droit] ce sont des points situés à gauche [droite] de RG [RD]
          (dans le sens de l'écoulement) dont la cote est inférieure à celle du point RG [RD]
          Si des profils avec des points trop bas en lit majeur sont détectés :
          n = 0 -> la simulation est arrêtée avec un message d'erreur fatale (défaut)
          n = 1 -> on passe outre, la simulation continue
          n = 2 -> on corrige brutalement les points fautifs en ramenant leur cote à celle
                   du point RG ou RD correspondant
          n = 3 -> on corrige les points dont la cote est trop basse d'au plus 10 cm. S'il reste
                   des points trop bas, la simulation est arrêtée, sinon elle continue.
          Dans tous les cas, la liste des profils fautifs est donnée sur OUTPUT.

    -eps=n où n définit la précision du test d'arrêt prise égale à 10^-n
           la valeur par défaut est 9

 Interruption ou suspension de la simulation (Linux uniquement) :
    tapez ctrl+C et choisissez parmi les options proposées :
          Continuer (c)
          Arrêter tout de suite (s)
          Arrêter à la prochaine minute|heure|jour (m|h|j)
```

11.2. Variante qui mime Mage-7

Mage-8 peut être compilé pour mimer autant que possible le comportement de Mage-7 et pouvoir être utilisé à la place de Mage-7 dans PamHyr. Cette variante produit un exécutable nommé mage_as7. De même Mage_Extraire devient mage_Extraire_as7.

La variante mage_as7 correspond en particulier aux options suivantes : −eps=5, −fp=1, −c=0, −i=0, −LC=0.

Il y a cependant d'autres différences qui ne correspondent à aucune option. En particulier le contrôle de la convergence des itérations est le même que celui de Mage-7, donc moins strict que celui de Mage-8 standard.

12. Évaluation de la qualité des résultats

12.1. Les indicateurs fournis par MAGE

MAGE fournit plusieurs indicateurs permettant de juger de la qualité des résultats obtenus. Pour l'essentiel ils permettent de vérifier la conservation de la masse (plus précisément du volume).

À la fin du fichier de sortie TRA on trouve ainsi :
- l'erreur relative en volume par bief à l'instant final : la valeur de cette erreur relative dans le bief pour lequel elle est maximale.
- l'erreur maximale sur la simulation, c'est-à-dire la valeur maximale de l'erreur relative en volume par bief.
- Quand il y a des ouvrages en travers, le volume total qui passe à travers chaque section singulière.

À chaque pas de temps inscrit dans le fichier TRA, le volume stocké dans chaque bief et dans chaque casier, ainsi que le volume total du réseau, sont indiqués.

Lors de l'extraction d'un hydrogramme à l'aide du programme Mage_Extraire (utilisé aussi par PamHyr), le fichier RES obtenu fournit le volume de l'hydrogramme. On peut ainsi facilement faire des vérifications des bilans Entrées / Sorties sur la durée d'une simulation.

Les volumes totaux des apports sont aussi indiqués au début du fichier TRA.

Hors bilan de volume, des indications sont données sur le comportement numérique de MAGE. Il s'agit principalement :
- Du nombre total d'itérations et du nombre total de pas de temps ; la rapport entre les deux donne une idée de la difficulté moyenne de convergence des itérations. Si ce rapport est élevé (voisin du nombre maximal d'itération par pas de temps) on peut soupçonner un problème de stabilité sans doute lié à une dynamique rapide de l'écoulement telle que vitesse élevée, montée de crue rapide, variation rapide de la condition limite aval (marée).
- Un nombre élevé de pas de temps, c'est-à-dire nettement différent du rapport de la durée de simulation au pas de temps maximal choisi, signifie que MAGE a dû réduire très souvent le pas de temps pour arriver à convergence. Cela peut être le signe d'un problème de stabilité : pas d'espace trop grand (au moins localement), pas de temps inadapté à la dynamique rapide de l'événement simulé.
- Le fichier OUTPUT fournit des informations à chaque pas de temps :
  - taux de variation de la cote et du débit (valeur maximale sur le réseau avec indication de la section où ce maximum est atteint).
  - résidu, c'est-à-dire une mesure de l'erreur : on résout une équation F(x) = a et on obtient un x, le résidu est la valeur absolue de F(x) − a
  - le nombre de Froude (valeur maximale sur le réseau avec indication de la section où ce maximum est atteint).
- Le fichier ERR fournit les messages d'erreur et d'avertissement de MAGE : un trop grand nombre de messages d'avertissements est le signe que quelque chose ne s'est pas bien passé.

12.1.1. Erreurs fatales

ERR020 (pas de temps trop petit) : Le diagnostic d'erreur fatale que MAGE produit le plus souvent est celui de « pas de temps inférieur à <dtmin> seconde ». Il est provoqué par une succession de réductions du pas de temps pour cause de non-convergence ou divergence des itérations (ERR001, ERR002 et ERR003).

Il s'agit généralement de problèmes d'ordre numérique. Ces problèmes numériques ont essentiellement deux sortes de causes.
- Des incohérences dans les données. Par exemple :
  - Il manque un fichier de données (SIN par exemple).
  - Un hydrogramme amont commence avec un débit qui n'est pas celui de la condition initiale.

  - Un limnigramme aval commence avec une cote qui n'est pas celle de la condition initiale.
  - Une marée qui fait descendre le niveau de l'eau trop bas.
  - Une condition à la limite aval en cote (Z(t) imposée) qui provoque des réflexions d'ondes. Cela peut se produire en particulier dans le cas d'une crue arrivant à l'aval d'un bief où la cote imposée est fixe.
  - Un pas d'espace « en accordéon » : les petits DX alternant avec les grands.
  - Un débordement en lit moyen sur fond quasi-plat dans le sens transversal.
  - Une cote de débordement mineur / moyen mal située, en particulier située au-dessus d'un élargissement dans le sens transversal.
- Un choix dans les paramètres numériques (pas de temps DT, paramètre THETA du schéma implicite, nombre de Courant maximum CRMAX) qui provoque une divergence ou une non-convergence des itérations. Il apparaît alors sur le fichier ERR des séries de diagnostics « erreur 001 : écart croissant entre 2 itérées successives » ou « erreur 002 : non convergence des itérations » ou « erreur 003 : bouclage des itérations » ou « erreur 010 : Froude très grand ». Par exemple :
  - Utilisation d'un très grand pas de temps pour simuler une marée.
  - Pas de temps très grand devant le pas d'espace c'est-à-dire nombre de Courant très grand.
  - Un paramètre THETA proche de 0,5 pour simuler une crue rapide générant des nombres de Froude proches de 1.

Si après vérification de la cohérence des données, le problème persiste, on dispose des stratégies suivantes :
- Utiliser un pas de temps automatique en choisissant CRMAX > 0 si on a remarqué que le nombre de Courant avait tendance à augmenter fortement ou si la solution présente de fortes oscillations.
- Augmenter THETA ce qui a pour effet de lisser la solution (moins cependant qu'avec la pseudo-viscosité).
- On peut aussi reprendre le traitement de la géométrie pour modifier le pas d'espace (plutôt à la baisse ce qui a pour effet d'augmenter le nombre de sections de calcul et donc le temps total de calcul).
- Remplacer dans la mesure du possible les conditions aux limites aval en cote fonction du temps par des lois de tarage Q(Z).

Toutefois il peut arriver que le message ERR010 corresponde à un passage en torrentiel réel. Dans ce cas on ne peut pas faire grand-chose, MAGE n'étant pas destiné en principe à traiter ces cas qui demeurent rares dans la pratique de la protection contre les crues.

Néanmoins on pourra essayer les stratégies suivantes :

1. S'il n'y a qu'une seule section avec un Froude égal a 1, on peut essayer de mettre dans cette section un déversoir fictif à la cote du fond qui fonctionnera en régime dénoyé.
2. Vérifier s'il n'y a pas d'assèchement de bief. Si c'est le cas il faut modifier la géométrie du bief concerné pour introduire une fente de Preissmann au fond du lit mineur ou bien ajouter un débit latéral petit de manière que le bief soit toujours en eau.

La plupart des autres messages d'erreur proviennent d'erreurs de données. Il sont en principe suffisamment explicites.

ERREUR 025 (tirant d'eau négatif ou nul) : les remarques précédentes faites pour ERR020 sont encore valables.
- Vérifier que le bief où cela se produit ne se vide pas effectivement (marée trop basse par exemple)
- En général si ce n'est pas le cas c'est qu'il y a divergence des itérations et les stratégies disponibles pour résoudre ce problème sont les mêmes que celles décrites précédemment pour les passages en torrentiel.

WARNING 001 (débordement hors du lit majeur) : Ce diagnostic peut apparaître dans certaines situations s'il y a divergence des itérations. On trouve dans ce cas des tirants d'eau énormes dans la section où cela s'est produit. Appliquer alors les mêmes stratégies que précédemment. Dans les autres cas il suffit de créer un fichier DEV pour traiter les déversements vers l'extérieur du réseau.

12.1.2. Codes d'erreur
- Stop 001 : dépassement de la cote de berge.
- Stop 012 : Cote aval imposée inférieure à la cote du fond.

- Stop 013 : Le débit maximum de la loi de tarage aval est inférieur au débit réel.
- Stop 015 : la vanne fonctionne à surface libre (utiliser une loi de déversoir-orifice).
- Stop 018 : erreur de répartition de débit entre ouvrages élémentaires.
- Stop 021 : erreur dans le calcul de perte de charge sur l'ouvrage.
- Stop 022 : matrice singulière dans RST2B.
- Stop 023 : matrice singulière dans RST2Z.
- Stop 024 : la matrice de la maille est singulière.
- Stop 025 : tirant d'eau négatif.
- Stop 026 : erreur sur ouvrage élémentaire (Hamont < 0 ou Haval > Hamont).
- Stop 027 : R.S.T. Nulle (problème dans le calcul de la maille).
- Stop 029 : nombre de points maximum dépassé pour définir les conditions aux limites.
- Stop 030 : deux sections consécutives sont à la même abscisse sans être singulières.
- Stop 031 : La section aval du bief est singulière sans être doublée.
- Stop 032 : section non singulière.
- Stop 033 : La section se rétrécit au-dessus de la cote de débordement mineur-moyen.
- Stop 034 : le nœud est un nœud amont et aussi un diffluence.
- Stop 035 : Il faut un bief à l'amont de la maille sinon le calcul est impossible.
- Stop 036 : il y a des nœuds à surface négative.
- Stop 037 : il y a des sections où la profondeur du lit mineur est nulle.
- Stop 038 : débordement du tableau Zfond dans la routine Detect_Marche_Nœud() ; envoyer un rapport de bug.
- Stop 039 : le déversement du bief vers le casier coule à l'envers (casier vers bief : ne marche pas).
- Stop 100 : Mage ne trouve pas le fichier licence.
- Stop 101 : Licence invalide : fichier Licence_Mage.dat corrompu.
- Stop 102 : Droits d'utilisation de mage périmés.
- Stop 103 : la ligne d'eau initiale ne permet pas de démarrer la simulation.
- Stop 104 : pas de temps négatif.
- Stop 105 : Erreur de lecture de NUM.
- Stop 106 : bug dans la routine calcul_dt() (envoyer un rapport de bug).
- Stop 107 : Erreur 014 : section mouillée ou périmètre mouillé du lit moyen négatif.
- Stop 108 : idem (origine différente).
- Stop 109 : bug dans BIEF4 (envoyer un rapport de bug).
- Stop 110 : bug dans BIEF4B (envoyer un rapport de bug).
- Stop 115 : contrepente au niveau d'une CL aval en régime uniforme (calculé par MAGE).
- Stop 116 : bug dans la lecture de INIMAGE. QLA (envoyer un rapport de bug).
- Stop 117 : bug dans la lecture de INIMAGE. QLA (envoyer un rapport de bug).
- Stop 118 : bug dans QD_ACTU (envoyer un rapport de bug).
- Stop 119 : bug dans ECRDEV (envoyer un rapport de bug).
- Stop 120 : Dichotomie : la solution est en dehors de l'intervalle initial.
- Stop 121 : Dichotomie : nombre maximum d'itérations atteint.
- Stop 122 : l'ouvrage doit être de type orifice pour pouvoir fonctionner en clapet.
- Stop 123 : bug dans PFLOT (envoyer un rapport de bug).
- Stop 124 : attention ce fichier LIM est lu comme un. AVA.
- Stop 125 : attention ce fichier AVA est lu comme un. LIM.
- Stop 127 : erreur dans le fichier. REP.
- Stop 128 : erreur à l'ouverture du fichier REP.
- Stop 129 : nombre de biefs maximum incompatible avec TALWEG.
- Stop 130 : nombre de sections de calcul trop grand.
- Stop 131 : nombre de biefs trop grand.
- Stop 132 : nombre d'ouvrages élémentaires trop grand.
- Stop 133 : la condition à la limite aval est sur un confluent.
- Stop 134 : Erreur de lecture de. TIT.
- Stop 135 : Erreur de lecture de. MIN.
- Stop 137 : nombre maximal d'ouvrages élémentaires dépassé.

- Stop 138 : nombre maximal d'ouvrages élémentaires dans une même section dépassé.
- Stop 139 : orifice-voute : la hauteur de la voute est plus grande que la demie largeur de l'ouvrage.
- Stop 140 : nombre maximal d'ouvrages élémentaires dépassé.
- Stop 141 : nombre maximal d'ouvrages élémentaires dépassé.
- Stop 142 : erreur dans SIN : ouvrage inconnu.
- Stop 143 : erreur dans SIN : le nom de l'ouvrage élémentaire existe déjà.
- Stop 144 : la somme du nombre d'ouvrages élémentaires et du nombre de sections singulières sans ouvrages dépasse le nombre maximal possible d'ouvrages élémentaires.
- Stop 145 : nombre maximal d'ouvrages élémentaires dépassé.
- Stop 146 : Erreurs dans la lecture des ouvrages.
- Stop 147 : Erreur dans le calcul des pelles des seuils.
- Stop 148 : Erreur dans les débits nominaux des pompes.
- Stop 149 : type de singularité inconnu.
- Stop 151 : pas de temps négatif.
- Stop 152 : Erreur dans la lecture de. NUM.
- Stop 154 : Le nœud est nœud aval : loi Q(t) impossible.
- Stop 155 : Le nœud est nœud non aval : loi Q(Z) impossible.
- Stop 156 : Le nœud est nœud non aval : loi Z(t) impossible.
- Stop 157 : le nœud n'existe pas.
- Stop 158 : loi non croissante.
- Stop 159 : le nombre maximal de secteurs d'apport dans le fichier LAT est dépassé.
- Stop 160 : erreur de syntaxe dans fichier LAT.
- Stop 161 : ouvrage référencé dans VAR non trouvé (dans SIN).
- Stop 168 : Erreur de type pour une ligne du fichier DEV.
- Stop 169 : Erreur dans la définition des déversements latéraux.
- Stop 170 : Erreur de lecture dans DEV.
- Stop 171 : Erreur de lecture dans DEV.
- Stop 172 : Erreur de lecture dans DEV.
- Stop 173 : le bief indiqué n'existe pas.
- Stop 181 : bug dans la routine calcul_dt() (envoyer un rapport de bug).
- Stop 182 : erreur de type de conditions à la limite aval.
- Stop 183 : bug dans le sous-programme apport : t < tinf (envoyer un rapport de bug).
- Stop 185 : bug dans ERR014 (envoyer un rapport de bug).
- Stop 186 : bug dans ERR015 (envoyer un rapport de bug).
- Stop 187 : échec de la sauvegarde de NUM ou SIN.
- Stop 188 : trop de sauvegardes de NUM ou SIN déjà faites.
- Stop 190 : Erreur dans NEXT_REAL() en lecture.
- Stop 197 : Erreur dans SQRT2 (argument négatif).
- Stop 202 : bug dans WVANNE (envoyer un rapport de bug).
- Stop 204 : INIPER : erreur dans la boucle 220 (bug).
- Stop 207 : échec du calcul de la ligne d'eau initiale.
- Stop 208 : la règle de régulation désigne un ouvrage inconnu.
- Stop 209 : bug dans MZERO (envoyer un rapport de bug).
- Stop 214 : le fichier n'existe pas.
- Stop 215 : le déversoir latéral est concurrent avec un déversement latéral par les berges.
- Stop 216 : la section de rejet du déversoir latéral est singulière.
- Stop 218 : anomalie dans la lecture de la géométrie.
- Stop 219 : bug dans TAL3 (envoyer un rapport de bug).
- Stop 222 : le nombre maximum de fichiers de données est dépassé.
- Stop 225 : Définition ambiguë du secteur de rugosité.
- Stop 226 : le secteur d'apport latéral ne contient aucune donnée.
- Stop 227 : bug dans DEBIT_TOTAL (envoyer un rapport de bug).
- Stop 228 : bug dans LIRE_SIN (envoyer un rapport de bug).
- Stop 229 : erreur de définition d'un secteur récepteur.

- Stop 230 : erreur de définition d'un secteur récepteur.

12.2. Les conditions de la qualité des résultats

Voir aussi le chapitre 13. (Conseils d'utilisation).

12.2.1. L'état initial

La construction d'un état initial est une étape délicate de la mise au point d'un modèle numérique. Voir le chapitre 13.3 pour différentes méthodes permettant d'y parvenir.

Du point de vue de la qualité des résultats il est important que, dans le cas où on veut un état initial permanent (le caractère permanent n'est bien sûr pas obligatoire, mais c'est ce qu'on fait le plus souvent), l'état initial utilisé le soit vraiment du point de vue de MAGE. C'est pour cela que bien souvent on prend soin de retarder la montée de crue par rapport au début de la simulation de façon que MAGE ait le temps de stabiliser la ligne d'eau initiale afin d'en faire une vraie ligne d'eau permanente.

Dans les cas où on a des casiers, le niveau dans chaque casier est défini par les niveaux dans les sections adjacentes. Si un casier est isolé par des ouvrages il peut avoir un niveau différent en fin de simulation même après que toute la crue soit passée à travers le réseau, simplement parce qu'il n'aura pas eu le temps de se vidanger complètement. Il faut alors être bien au fait des données qu'on utilise si on reprend cet état final comme état initial.

NB : Quand MAGE cherche un régime permanent ($t \longrightarrow \infty$) il ne résout pas les équations de St-Venant de la même façon que s'il travaillait directement sur les équations indépendantes du temps.

12.2.2. Le choix des conditions aux limites aval

MAGE sait utiliser des conditions aux limites aval données soit sous la forme de lois de tarage (débit fonction du niveau) soit des limnigrammes (débit fonction du temps). Les simulations donnent en général de meilleurs résultats (convergence plus rapide, meilleure stabilité) si on utilise des lois de tarage quand cela est possible.

Pour utiliser des limnigrammes il est important de disposer de données aux limites avec les bons décalages temporels entre les entrées amont et les sorties aval afin de ne pas fausser la dynamique de l'écoulement.

12.2.3. La vérification de la modélisation géométrique

Après la lecture des données géométrique MAGE fait une vérification de celles-ci et calcule un certain nombre d'indicateurs inscrits au début du fichier TRA. Ces indicateurs permettent de détecter des caractéristiques géométriques pouvant entraîner des difficultés de modélisation ou numériques.

Cette analyse de la géométrie permet :
- La détection des marches d'escalier au niveau des nœuds du réseau : MAGE calcule les différences de cotes du fond entre les sections adjacentes à chaque nœud interne du réseau. Il signale tout décrochement.
- La détection des ruptures de pente dans les biefs qui peuvent entraîner des passages localisés en torrentiel.
- La détection des variations importantes de la largeur du lit mineur qui peuvent aussi entraîner des passages localisés en torrentiel.
- La détection des points bas dans les lits majeurs actifs. Par point bas on entend un point plus bas que la cote de débordement correspondante.
- La vérification du calcul des paramètres géométriques. Il s'agit de comparer le calcul de la largeur, du périmètre et de la section mouillées selon qu'il est fait sur les données en XYZ ou sur la tabulation largeurs-cotes.

Cette analyse de la géométrie permet aussi de repérer les points de contrôles des écoulements et de les confronter à la connaissance du terrain du modélisateur. Si les données modélisées ne correspondent pas bien à la réalité, il faut les corriger.

12.2.4. La modélisation des ouvrages et singularités

On peut avoir des difficultés numériques avec un ouvrage quand le niveau d'eau est tellement élevé que la perte de charge sur l'ouvrage devient très faible. Dans ce cas il faudrait, en toute rigueur, supprimer l'ouvrage tout en le conservant pour des niveaux plus faibles. MAGE ne sait pas faire une telle transition.

En provoquant une déconnexion hydraulique, un ouvrage dénoyé sur un bief à l'intérieur de la maille peut générer des difficultés de convergence. Ce n'est pas systématique mais cela peut arriver, il faut donc penser à vérifier ce point.

On peut rencontrer aussi des difficultés numériques avec un déversoir très long qui a une charge amont petite, une petite variation de niveau peut entraîner une forte variation de débit.

12.2.5. La modélisation des débordements

Il faut éviter de modéliser des lits moyens à fond horizontal. D'une part c'est une simplification abusive et d'autre part un fond plat signifie que la plus petite couche d'eau s'étale instantanément sur toute la largeur du lit moyen, ce qui ne manque pas de créer des problèmes numériques (dérivée « infinie »).

Lors de la lecture de la géométrie MAGE vérifie l'existence de lits moyens plats.

12.2.6. Les paramètres numériques de la simulation

Le choix du pas de temps maximal peut avoir une influence importante sur la stabilité et la convergence de la simulation.

Par ailleurs le choix d'un pas de temps trop grand pour le stockage des résultats peut avoir un effet de filtrage capable de masquer des variations de l'écoulement ou de donner une image complètement fausse de sa dynamique. Pour s'en convaincre il suffit de simuler un écoulement soumis à une marée comme condition à la limite aval et de ne stocker les lignes d'eau calculées que toutes les 4 heures. On risque fort, en procédant ainsi de ne pas voir les niveaux haut et bas réels et même de modifier la périodicité des limnigrammes amont.

Le fichier NUM (§ 9.12) permet de définir plusieurs paramètres numériques qui servent à contrôler la simulation et en particulier sa qualité (stabilité, convergence). Il ne faut pas hésiter à les utiliser. Par exemple on peut renforcer les contraintes sur la conservation des volumes ou mieux contrôler le pas de temps en le définissant automatiquement à partir du nombre de Courant.

12.3. Les tests de sensibilité

Comme pour toute simulation numérique il est important d'en vérifier la robustesse en faisant des tests de sensibilité aux principaux paramètres tels que les pas de temps et d'espace, les coefficients de Strickler et de débit. Pour de petites variations de ces données la simulation doit avoir un comportement et fournir des résultats à peu près identiques :

- nombre de pas de temps comparable ;
- nombre d'itérations par pas de temps comparable ;
- bilan de volumes très voisins ;
- résultats (lignes d'eau, hydrogrammes, limnigramme, etc.) peu changés.

Toute variation importante dans le comportement ou les résultats doit trouver une explication appuyée sur des bases physiques. Au besoin il faut réduire le pas de temps ou le pas d'espace (ou les deux) pour atteindre des valeurs autour desquelles le modèle numérique est robuste.

13. Conseils d'utilisation

13.1. Le paramètre thêta du schéma implicite

En principe il faut choisir une valeur comprise entre 0,5 et 1. Cependant la diffusion numérique du schéma implicite, qui est le prix à payer pour sa stabilité, est d'autant plus grande que thêta est proche de 1. Cela signifie que plus thêta est grand plus la solution calculée est lissée (ou étalée) par rapport à la solution réelle. En particulier cet étalement a une influence directe sur les temps de propagation des phénomènes. Inversement une valeur proche de 0,5 provoquera des oscillations lors des phénomènes rapides. Il faut donc choisir une valeur la plus proche possible de 0,5 qui ne provoque pas d'oscillations inacceptables.

En pratique, du fait de la non-linéarité des équations de Saint-Venant, on choisira une valeur de thêta autour de 0,65 (valeur par défaut dans MAGE).

13.2. Le pas de temps

Le principal avantage d'un schéma implicite est qu'il autorise des pas de temps grands qui ne sont pas soumis à la condition de stabilité de Courant-Friedrichs-Lewy :

$$Cr=(V+c)\frac{Dt}{Dx} < 1 \tag{13.1}$$

où Cr est le nombre de Courant, V la vitesse moyenne et c la célérité des ondes (voir § 13.1 ci-dessus l'utilisation de thêta).

Le pas de temps est pris par défaut égal à 600 secondes (à 300 secondes si on utilise PamHyr). Il doit être réduit dans certaines circonstances, telles que :

- Crue brutale c'est-à-dire variation brutale du débit au niveau des conditions aux limites amont.
- Célérité des ondes grande : c est définie par $c=\sqrt{g\frac{S}{L}}$ donc en général la célérité des ondes est croissante avec le tirant d'eau. Il faut particulièrement tenir compte de c quand il y a une forte influence de la condition aval ; par exemple si l'on veut simuler la remontée de la marée dans un canal à faible pente.
- Manœuvre d'ouvrage rapide et de grande amplitude. Dans ce cas il faut toujours plusieurs pas de temps (au moins 3) durant une telle manœuvre. En particulier MAGE réduit automatiquement Dt quand il y a mise en route ou arrêt d'une pompe asservie à la cote. C'est ce à quoi servent les données de durée de montée en puissance et d'arrêt de pompe. Dt est pris égal au tiers de ces valeurs.
  MAGE réduit également automatiquement le pas de temps s'il y a un problème de convergence des itérations. Pour régler cette réduction on dispose dans NUM du nombre maximum d'itérations et du facteur de réduction du pas de temps : si les itérations n'ont pas convergé pour le nombre d'itérations prescrit, MAGE divise DT par le facteur indiqué. Les incidents donnant lieu à une telle réduction automatique sont la non-convergence des itérations (ERR002), l'apparition de 3 diagnostics successifs (ERR001) d'écart non décroissant entre 2 itérées successives, le bouclage des itérations (ERR003), un tirant d'eau négatif ou un passage en torrentiel avant convergence, enfin une inégalité des cotes à un nœud de maille (nœud avec diffluence).

13.3. Construction d'un état initial

La construction d'un état initial compatible avec les conditions aux limites est une étape obligée de la construction d'un modèle numérique. Avec MAGE on dispose de plusieurs méthodes possibles qui toutes, au final, ont pour but de fournir un débit et une cote en chaque point de calcul. Si on utilise PamHyr les points de calcul correspondent aux profils issus du maillage.

13.3.1. Méthodes principales

On dispose de 3 méthodes de base :

1. écrire directement le fichier INI ;
2. laisser MAGE trouver tout seul l’état initial ; cela se fait en utilisant le paramètre ad-hoc dans NUM ;
3. utiliser le fichier d’état final d’une simulation précédente comme fichier INI ; cela suppose bien entendu d’avoir pu fournir un état initial pour cette simulation précédente.

13.3.2. Méthodologie globale

En général il est trop fastidieux sinon très difficile d’écrire directement le fichier INI avec des données valide (une vraie ligne d’eau initiale, c’est-à-dire qui vérifie les équations de Saint-Venant). Dans la pratique on va donc procéder par étapes.

La première étape consiste à laisser MAGE se débrouiller pour trouver son état initial. S’il y arrive, tout va bien. Cependant il faut s’assurer que le début de la partie intéressante de la simulation commence bien sur l’état initial souhaité. En clair il est préférable de laisser l’écoulement initial en régime permanent pendant un peu de temps pour permettre à MAGE d’assurer une bonne stabilisation de celui-ci avant d’atteindre la partie transitoire de la simulation. Cela se fait en retardant les conditions aux limites temporelles d’une durée suffisante ou en commençant la simulation à une date antérieure à la date de départ des CL temporelles.

On peut aussi commencer par une simulation en régime permanent destinée exclusivement à calculer l’état initial. Dans ce cas, une fois celui-ci trouvé, il suffira de récupérer le fichier Mage_fin.ini de la simulation en permanent pour disposer d’un fichier INI après bien entendu l’avoir renommé. Dans le cas où le modèle contient aussi des ouvrages mobiles, il faudra récupérer également le fichier Mage_fin.sin.

Si MAGE ne parvient pas à trouver tout seul un état permanent, il va falloir l’aider. L’idée de base est de trouver un état permanent facile à calculer à partir duquel on pourra, à l’aide de conditions aux limites bien choisies, définir une transition vers l’état initial attendu. Il s’agit donc de faire une suite de simulations, l’état final de l’une fournissant l’état initial de la suivante, en partant d’une situation initiale facile à calculer.

On peut par exemple partir d’une petite crue, à écoulement relativement lent, pour rejoindre un étiage, avec un écoulement voisin d’un régime torrentiel à cause des faibles tirants d’eau.

Un cas particulier de la construction d’un état initial par transitions successives, est celui de la **méthode dite de la baignoire**, qui consiste à choisir, comme état initial facile à calculer, un état horizontal avec un débit nul. Un tel état permanent satisfait évidemment les équations de Saint-Venant et il est facile de le définir « à la main » dans le fichier INI puisqu’il suffit de mettre la même valeur de cote en chaque point de calcul. Il faut évidemment choisir une cote légèrement supérieure à la cote du fond la plus haute. La partie délicate de la méthode est la transition vers l’état initial souhaité, c’est-à-dire celui qui correspond au début des conditions aux limites temporelles de la simulation à réaliser.

Si le dénivelé global du modèle est grand, il va falloir vidanger un très grand volume d’eau par la condition à la limite aval. Cela se fera en utilisant comme CL aval un limnigramme qui descend lentement vers la cote aval souhaitée. Il faudra parfois programmer une descente vraiment lente (parfois plusieurs heures, voire plusieurs jours) pour éviter de générer des écoulements trop brutaux qui feraient diverger le modèle numérique. En même temps il faudra faire monter les débits amont vers les débits de base des hydrogrammes amont de la simulation visée, pour au final atteindre un état stationnaire adapté à la simulation à réaliser.

13.4. Prise en compte des écoulements torrentiels

MAGE est conçu pour être utilisé en mode fluvial et les passages en torrentiel sont des anomalies qui demandent à être traitées mais restent toutefois en général très localisés.

On peut distinguer plusieurs types de « passage en torrentiel » ; tout d'abord il y a ceux qu'on appellera les « vrais passages en torrentiel » qui sont détectés par un nombre de Froude supérieur à 1 et qui correspondent à une situation réelle (sur le terrain) dans laquelle, pour les mêmes conditions aux limites et données de rugosité, on rencontre effectivement un écoulement localement torrentiel. Par opposition on appellera « faux passage en torrentiel » toutes les autres situations dans lesquelles MAGE détecte un nombre de Froude supérieur ou égal à 1.

Les faux passages en torrentiel produisent un comportement du code analogue aux vrais, mais dans ces cas le modélisateur sait (ou présume) qu'un tel passage en torrentiel est impossible. Pour faire un tel diagnostic il se base sur son expertise d'hydraulicien et sur ce qu'il connaît de l'écoulement réel (observations de terrain). En général ces faux passages en torrentiels se traduisent par des nombres de Froude très grands.

Les principales causes d'apparition des faux passages en torrentiel sont les suivantes.

- *Les données du modèle ne sont pas en adéquation avec la situation réelle* ; par exemple un profil en travers a été défini plus étroit qu'il n'est dans la réalité, ce qui provoque un élargissement brutal à l'aval avec un exhaussement de la ligne d'eau à l'amont et un abaissement de celle-ci à l'aval.
- *Des choix de modélisation inadaptés* ; par exemple le chenal réel présente une marche d'escalier descendante qui génère une perte de charge spécifique ; une telle perte de charge peut être avantageusement modélisée par une loi de seuil.
- *Des paramètres numériques mal choisis* ; par exemple un pas de temps incompatible avec l'échelle de temps de l'écoulement, typiquement un pas de temps trop grand pour modéliser un écoulement rapide.
- *Une discrétisation spatiale trop grossière* (un pas d'espace trop grand) incompatible avec la stabilité du schéma numérique. En effet il ne faut pas perdre de vue que, bien que le schéma de Preissmann soit inconditionnellement stable, la preuve de cette stabilité est faite sur une version linéarisée des équations de St-Venant et pour des géométries régulières. En toute généralité on ne sait pas vraiment ce qu'il en est et on doit rester très prudent dans les cas limites (géométries complexes, pentes fortes, débordements).

Les vrais passages en torrentiel se caractérisent en général par des nombres de Froude qui dépassent assez peu le seuil de 1 ; en général on trouve des valeurs de 1,2 à 1,5 et rarement proches de 2. MAGE n'est pas conçu pour traiter ces cas ; cela tient pour l'essentiel au choix du schéma numérique aux différences finies de Preissmann qui se justifie pleinement dans le cadre des écoulements en régime fluvial. Bien que le schéma de Preissmann ne soit pas adapté au cas des écoulements torrentiels, on constate que MAGE ne diverge pas systématiquement quand le nombre de Froude dépasse 1. C'est pour cela que MAGE propose un paramètre de réglage du nombre de Froude maximal acceptable (cf. NUM). Cette stratégie est un choix naturel quand on ne dispose pas d'une alternative spécialement ciblée sur le traitement des cas de passages en torrentiel. Bien entendu, dans les cas difficiles, les calculs finissent par diverger et MAGE s'arrête avec un diagnostic tel que « pas de temps inférieur à 1 seconde ».

Par ailleurs MAGE dispose d'un traitement alternatif des écoulements localement torrentiels. Il s'agit de l'approche classique qui consiste à annuler progressivement le terme d'accélération convective $\frac{\partial(\beta Q^2/S)}{\partial x}$ quand le nombre de Froude approche 1. L'utilisateur peut définir la valeur du nombre de Froude à partir de laquelle MAGE commence à annuler ce terme. Voir la description du fichier « param_torrentiel » au chapitre 9.19.2 pour les détails.

Il faut utiliser cette procédure avec prudence car si elle permet à MAGE de ne pas arrêter la simulation par divergence, les résultats obtenus dans la zone torrentielle sont peu précis mais n'ont pas d'influence sensible sur la zone qui reste en régime fluvial. Il est donc important que ces tronçons torrentiels ne se trouvent pas dans une zone à enjeu où on cherche justement à obtenir des résultats de simulation fiables. Si on a besoin de résultats dans une zone où l'écoulement réel est torrentiel, il faut utiliser un code de calcul spécialement conçu pour simuler les écoulements torrentiels.

Le fichier OUTPUT permet de connaître à chaque pas de temps la valeur maximale du nombre de Froude sur le réseau simulé.

Les fichiers *Mage_fin.ini* (ligne d’eau finale, §9.20.5) et *Mage_ini.ini* (ligne d’eau initiale calculée, §9.20.6) donnent le nombre de Froude en chaque point de calcul.

13.5. Les casiers et nœuds à surface non-nulle

La surface d’un casier ne doit pas être trop grande : on ne peut pas simuler par un nœud à surface non-nulle une retenue de plusieurs milliers d’hectares.

En effet la modélisation de l’écoulement à travers un nœud à surface non-nulle repose sur l’hypothèse que l’eau est horizontale dans le nœud. Or pour que l’eau coule entre l’entrée et la sortie il faut bien qu’il y ait une différence de charge que MAGE approche par une différence de niveau. Pour que cette différence de niveau puisse être négligée il faut que la taille du nœud, plus précisément la distance entre l’entrée et la sortie du nœud, soit faible.

D’autre part cette modélisation des nœuds à surface non-nulle a pour effet de produire une transmission instantanée de l’information entre l’entrée et la sortie : toute modification du niveau à l’entrée du nœud se traduit par une modification immédiate du niveau à la sortie. Il est clair que pour une retenue un peu vaste cela n’est pas acceptable.

13.6. Débordement sur fond horizontal

Un problème numérique peut se poser dans le cas d’un lit moyen ou majeur dont le fond est horizontal dans le sens perpendiculaire à celui de l’écoulement.

Dans cette situation il peut se produire des accidents numériques au moment du débordement du lit mineur vers le lit moyen en raison de la brutale augmentation de la largeur au miroir et du périmètre mouillé sans que la section mouillée varie de façon significative puisque le tirant d’eau dans le lit moyen est encore faible. Il s’ensuit finalement une discontinuité de la largeur au miroir dans l’équation de continuité qui nuit à la stabilité et à la convergence du schéma numérique.

Si cela se produit la seule stratégie disponible actuellement consiste à donner une pente transversale au lit moyen ou majeur suffisante (environ 1/1000) pour supprimer la discontinuité de la largeur au miroir à la cote de débordement mineur – majeur.

13.7. Comment simuler le laminage provoqué par un casier ?

Un casier est un nœud à surface non-nulle placé en parallèle ou en dérivation par rapport à l’écoulement principal. On simule ainsi une zone dans laquelle on suppose que la ligne d’eau est horizontale. Dans le cas contraire on peut simuler un écoulement dans un bief ou dans un casier latéral. On a deux possibilités :

13.7.1. Casier traité comme un nœud amont (le plus simple)

Dans ce cas il y a un bief principal sur lequel est greffé le bief d’alimentation du casier qui peut couler dans les deux sens. Pour NET il faut orienter ce bief du casier (amont) vers le bief principal (aval) et ajouter à l’amont du casier un petit bief qui permettra d’imposer une condition à la limite amont Q=0. Le bief d’alimentation du casier peut être muni d’un ouvrage (seuil par exemple) qui contrôle le remplissage et la vidange de celui-ci.

13.7.2. Casier traité comme un nœud aval (le moins simple)

Dans ce cas un casier est un nœud à surface non-nulle qui termine un bief de maille en cul-de-sac. Il faut donc lui affecter une condition à la limite aval « Q=0 ». Cependant on ne peut pas procéder directement ainsi parce que les nœuds aval sont supposés à surface nulles pour des raisons algorithmiques : les conditions aux limites aval sont appliquées à la dernière section du bief donc à l’amont du nœud aval alors que la condition « Q=0 » doit être appliquée à la sortie. Pour tourner la difficulté on crée un bief court à l’aval du casier, bief qui se termine par un nœud à surface nulle où on peut imposer maintenant la condition « Q=0 ». Ainsi du débit peut entrer dans le casier, mais il ne peut pas en sortir par le « fond » ; la seule façon pour le casier de se vidanger est de renvoyer l’eau par le chemin par lequel elle est arrivée c’est-à-dire d’avoir un débit d’entrée négatif.

La dernière difficulté à surmonter est la constitution d’une ligne d’eau initiale. En effet, en général le calcul de la maille diverge si l’on impose une condition « Q=0 » à un nœud aval. Cependant, en régime permanent, si l’on a un casier donc avec un débit nul à la sortie on peut admettre que le débit est nul dans chacun des biefs qui arrivent au casier et par conséquent que la ligne d’eau y est horizontale. On pourra donc procéder de la façon suivante :

1. Première étape : régime permanent sans casier. On supprime dans le modèle original tous les biefs qui débouchent dans un casier et dans lesquels le débit est nul. On peut calculer une ligne d’eau permanente sur ce modèle réduit et la transférer dans INI.
2. Deuxième étape : on complète INI à la main pour chacun des biefs manquant par une ligne d’eau horizontale.
3. Enfin on peut introduire dans AVA la condition « Q=0 » pour chacun des casiers, affectée non pas au casier lui-même mais au nœud aval du bief de sortie du casier.

13.8. Absence d’écoulement dans une section singulière.

Ce cas peut se présenter dans une maille dans laquelle un déversoir assurant un transfert entre deux biefs de la maille, ne coule qu’à partir d’un certain niveau de crue. Il est possible que dans ce cas MAGE trouve une solution qui ne respecte pas l’égalité des cotes aux nœuds de la maille.

La seule façon de procéder est alors de faire un premier calcul en permanent pour une crue qui fait déverser l’ouvrage. Ensuite on calcule une ligne d’eau permanente basse avec MAGE en simulant une décrue entre le niveau haut et le niveau bas de l’écoulement.

Partie 3

14. Validation du code – Tests automatiques

Les tests de validation présentés ici correspondent aux tests du dossier « tests_automatiques » du dépôt Git de Mage.

14.1. TEST 1 – Retour au régime permanent initial

Objectif du test

Partant d'un état initial en régime permanent, on réalise un calcul transitoire en faisant varier les conditions aux limites au cours du temps. Par un retour aux conditions initiales, le résultat obtenu en fin de simulation doit correspondre au régime permanent initial. On contrôle de plus la conservation de la masse. Ne faisant pas de comparaison avec une solution analytique ou exacte potentielle, on réalise ce test sur un canal de géométrie irrégulière.

Description du canal

On modélise un canal de 10 kilomètres de longueur, défini en trois tronçons représentés sur le schéma suivant :

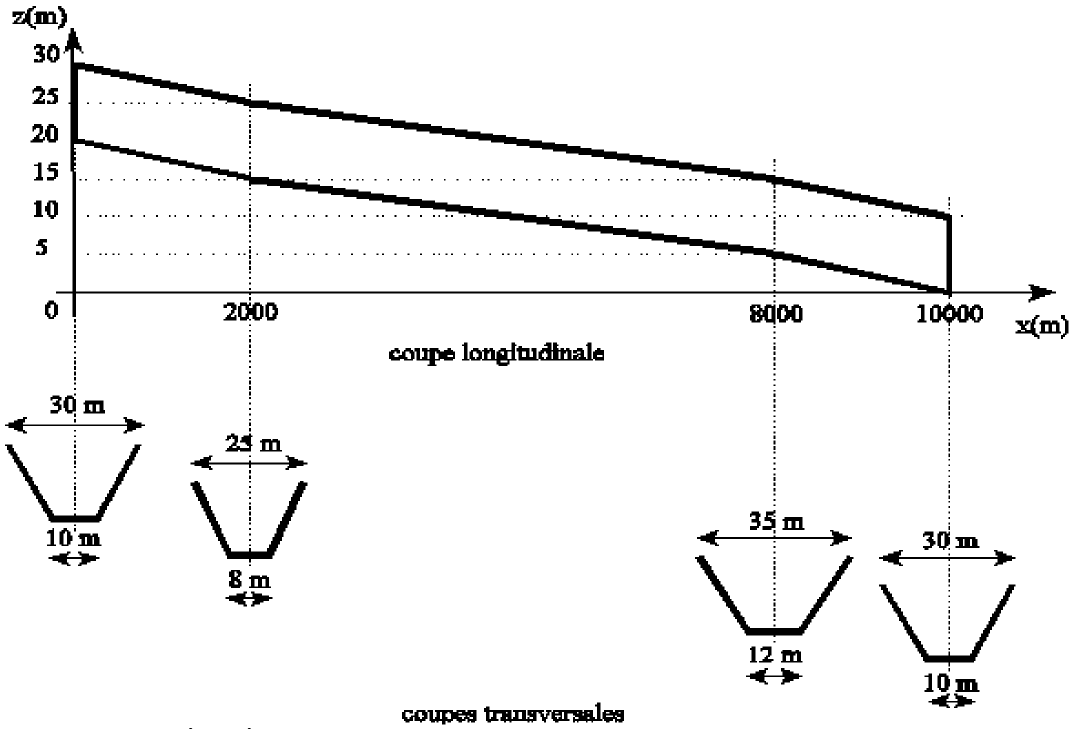


Figure 18 : géométrie pour le cas-test n°1

Frottement

On tient compte du frottement en définissant un coefficient de Strickler sur chaque tronçon du canal.

$$K=\begin{cases}40 & \text{pour} \quad 0\leq x\leq 2000\\ 30 & \text{pour} \quad 2000<x\leq 8000\\ 40 & \text{pour} \quad 8000<x\leq 10000\end{cases} \tag{14.1}$$

Conditions aux limites

Les conditions aux limites utilisées pour cet exemple sont les suivantes :

Hydrogramme amont		***Limnigramme aval***	
temps (min)	débit (m3/s)	temps (min)	cote (m)
0	100	0	3
30	100	60	4
90	120	210	45
150	160	600	3
210	210	1440	3
270	210		
600	100		

Remarque :

Si dans un limnigramme la dernière cote fournie est égale à la première, *MAGE* considère la condition limite aval comme étant une marée. Il réalise alors un bouclage sur les cotes entrées. Afin d'éviter cela, on impose la cote $Z = 3\ m$ jusqu' à la fin de la simulation.

Conditions initiales

À partir des conditions aux limites Q = 100 m^3/s à l'amont et Z = 3 m à l'aval, FLUVIA fournit un écoulement en régime permanent. On recalcule alors cet écoulement avec MAGE de manière à éliminer les petites différences de résultats dues à des schémas numériques différents.

C'est cet écoulement permanent donné par MAGE que l'on prend comme condition initiale pour ce test.

Données numériques

temps de simulation : 1 jour
pas de temps : 10 minutes (pas de temps minimum 1 seconde)
pas d'espace : 200 mètres (soit 51 sections de calcul).

Fichier NUM

```
Paramètre d'implicitation [0.65] : 0.65 S B R
Instant initial en JJJ:HH:MM:SS : 000:00:00:00
```

```
Instant final en JJJ:HH:MM:SS : 001:00:00:00
Pas de temps en SECONDES [720.] : 600. 1.
Pas de temps d'écriture sur. TRA : 600.
Pas de temps d'écriture sur. BIN : 600.
Type des itérations [00] : -1
Coefficient de viscosité [0.] : 0.
Nombre de Courant maximum admis [-1.] : -1.
Tirant d'eau minimum [0.1] : 0.1
Nombre maximum d'itérations : 09
Facteur de réduction du pas de temps : 2
itérations à précision maximale : 99
Facteur de réduction de précision Z Q : 1+1 1+1
itérations avant basculement : 99
Borne d'erreur en cote pour la maille : 0.001
Valeur maximum du Froude : 5.
Bilan en volume par bief (O/N) : O 0.0001
Sections témoins (bie/sec) :
```

Résultats

On calcule les écarts relatifs en normes L^1 et L^∞ entre les lignes d'eau initiale et finale pour les tirants d'eau et les débits.

On calcule également, à l'aide de la méthode des trapèzes, les volumes des hydrogrammes entrant et sortant. Le volume théorique injecté est $V_{injecté}$ = 10 611 000 m^3.

On obtient le résultat suivant :

```
=============================================
Test n°1 : Retour au régime permanent initial
Date début simulation : 09/06/2021 (16:30:29)
=============================================
 epsilon pour les lignes d'eau :   1.000000E-06
 epsilon pour les volumes :   1.000000E-06

 Erreur pour les lignes d'eau en norme L1 :   1.220292E-08
 Erreur pour les débits en norme L1 :   0.000000E+00
 >>>>>>>>>> Le test n°1 est valide en norme L1

 Erreur pour les lignes d'eau en norme L_infinie :   2.545196E-07
 Erreur pour les débits en norme L_infinie :   0.000000E+00
 >>>>>>>>>> Le test n°1 est valide en norme L_infinie

 Le volume entré est :   1.06110000E+07
 Le volume sorti est :   1.06110000E+07
 Erreur pour les volumes :   4.31404837E-10
 >>>>>>>>>> Le test n°1 est valide pour le bilan de volume E/S
```

14.2. TEST 2 – Remplissage Uniforme d'un Canal

On remplit un canal, fermé à ses extrémités, par un débit latéral uniformément réparti. On contrôle que la hauteur d'eau calculée correspond à chaque instant à la hauteur d'eau exacte.

Objectif du test

Ce test très simple a pour objet de vérifier le comportement de MAGE en cas de débits latéraux. Pour cela, on simule le remplissage d'un bassin par des apports latéraux répartis uniformément sur toute la longueur.

Description du canal

Le bassin est représenté par un bief à fond plat de section rectangulaire, de longueur 750 mètres, de largeur 100 mètres et de profondeur 5 mètres.

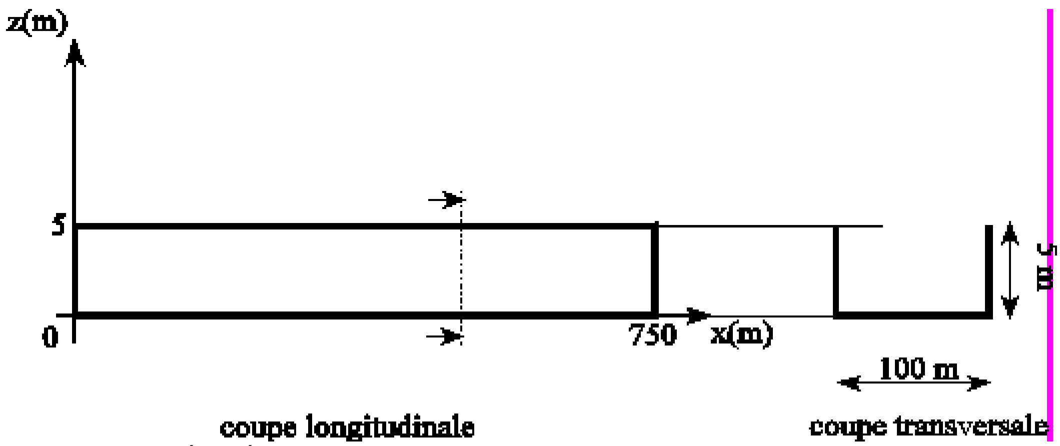


Figure 19 : géométrie pour le cas-test n°2

Frottement

On prend comme coefficient de Strickler K = 50. Le frottement étant sans influence sur cet exemple, toute autre valeur de K peut être choisie.

Conditions aux limites

En imposant un débit nul à l'amont, on simule la paroi « amont » du bassin. La paroi aval est simulée par une loi de tarage à débit nul.

Conditions initiales

L'état initial étant considéré au repos, on part d'une ligne d'eau horizontale de cote Z = 2 m et d'un débit nul sur toute la longueur du bassin.

Débits latéraux

On injecte un débit latéral uniforme de 0.1 $m^3/s/m$ sur la longueur du bassin.

Solution

On s'attend à une élévation constante de la ligne d'eau de 0.06 m / min et conservation d'un débit nul dans le bassin.

Données numériques

temps de simulation : 15 minutes
pas de temps : 60 secondes (pas de temps minimum 1 seconde)
pas d'espace : 10 mètres (soit 77 sections de calcul).

Fichier NUM

```
Paramètre d'implicitation [0.65] : 0.65 S B R
Instant initial en JJJ:HH:MM:SS : 000:00:00:00
Instant final en JJJ:HH:MM:SS : 000:00:15:00
Pas de temps en SECONDES [720.] : 60 1.
Pas de temps d'écriture sur. TRA : 60
Pas de temps d'écriture sur. BIN : 60
Type des itérations [00] : -1
Coefficient de viscosité [0.] : 0.
Nombre de Courant maximum admis [-1.] : -1.
Tirant d'eau minimum [0.1] : 0.1
Nombre maximum d'itérations : 10
Facteur de réduction du pas de temps : 2
itérations à précision maximale : 99
Facteur de réduction de précision Z Q : 1+1 1+1
itérations avant basculement : 99
Borne d'erreur en cote pour la maille : 0.001
Valeur maximum du Froude : 5.
Bilan en volume par bief (O/N) : O 0.00001
Sections témoins (bie/sec) :
```

Résultats

Le résultat fourni par MAGE à chaque pas de temps et en chaque section de calcul coïncide parfaitement avec la solution exacte (aussi bien en cote qu'en débit). On calcule la moyenne des erreurs sur les lignes d'eau à 5, 10 et 15 minutes.

```
=========================================================================
Test n°2 : Remplissage d'un canal uniforme par un apport latéral constant
Date début simulation : 09/06/2021 (15:39:44)
=========================================================================
 epsilon :   1.000000E-04

 Erreur en norme L1 pour les lignes d'eau :   5.937373E-05
 >>>>>>>>>> Le test n°2 est valide  en norme L1

 Erreur en norme L_infinie pour les lignes d'eau :   5.937373E-05
 >>>>>>>>>> Le test n°2 est valide en norme L_infinie
```

14.3. TEST 3 – Réponse à un Limnigramme Linéaire

En imposant comme condition à la limite aval un limnigramme linéaire, on compare le débit obtenu avec la solution exacte.

Objectif du test

Sous certaines hypothèses, il est possible de connaître exactement l'écoulement résultant d'une variation linéaire par rapport au temps de la cote imposée à l'aval. L'objectif de ce test est de se placer du mieux possible dans les conditions requises par les hypothèses, puis de comparer les résultats que donne MAGE avec les résultats attendus.

Description du canal

Le canal est à géométrie uniforme, sans pente et de section rectangulaire de largeur 2 mètres. L'extrémité amont du canal est fermée.

Ce test est réalisé en deux temps : on effectue une première simulation sur un canal de longueur 10 mètres, puis une deuxième simulation sur un canal de longueur 50 mètres.

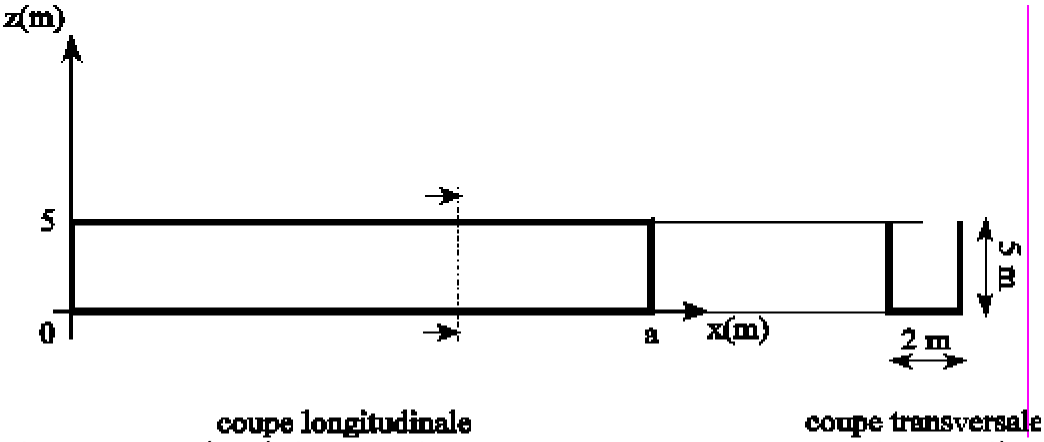


Figure 20 : géométrie pour le test n°3 avec a = 10 pour la première simulation et a = 50 pour la seconde.

Frottements

On se met dans des conditions de glissement. Pour cela on prend comme coefficient de Strickler $K = 9999$.

Conditions aux limites

On fixe comme condition amont un débit nul, simulant ainsi la fermeture de l'extrémité amont. On impose à l'aval le limnigramme linéaire par morceaux suivant, où Z est exprimé en mètres et t en minutes :

$$Z(t)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \le t \le 20 \\ t/60+2/3 & \text{si} \quad 20 \le t \le 80 \\ t/30-2/3 & \text{si} \quad 80 < t \le 140 \\ 4 & \text{si} \quad t \ge 140 \end{cases} \tag{14.2}$$

Ce limnigramme est introduit de la manière suivante :

LIMNIGRAMME AVAL	
temps (minutes)	***Cote (mètres)***
0	1
20	1
80	2
140	4

Conditions initiales

On part d'un écoulement initial donné par une ligne d'eau horizontale (Z = 1 m), et par un débit nul sur l'ensemble du canal.

Données numériques

- temps de simulation : 2 h 40 min
- pas de temps : 30 secondes (pas de temps minimum 1 seconde)
- pas d'espace : 0,5 mètre (soit 21 sections de calcul pour la première simulation et 101 sections de calcul pour la deuxième).

Fichier NUM, première simulation

```
Paramètre d'implicitation [0.65] : 0.85 S B R
Instant initial en JJJ:HH:MM:SS : 000:00:00:00
Instant final en JJJ:HH:MM:SS : 000:02:40:00
Pas de temps en SECONDES [720.] : 30. 1.
Pas de temps d'écriture sur. TRA : 600.
Pas de temps d'écriture sur. BIN : 30.
Type des itérations [00] : -1
Coefficient de viscosité [0.] : 0.23
Nombre de Courant maximum admis [-1.] : -1.
Tirant d'eau minimum [0.1] : 0.01
Nombre maximum d'itérations : 09
Facteur de réduction du pas de temps : 2
itérations à précision maximale : 99
Facteur de réduction de précision Z Q : 1+1 1+1
itérations avant basculement : 99
Borne d'erreur en cote pour la maille : 0.001
Valeur maximum du Froude : 5.
Bilan en volume par bief (O/N) : O 0.0001
Sections témoins (bie/sec) :
```

Fichier NUM, seconde simulation

```
Paramètre d'implicitation [0.65] : 0.85 S B R
Instant initial en JJJ:HH:MM:SS : 000:00:00:00
Instant final en JJJ:HH:MM:SS : 000:02:40:00
Pas de temps en SECONDES [720.] : 30. 1.
Pas de temps d'écriture sur. TRA : 600.
```

```
Pas de temps d'écriture sur. BIN : 30.
Type des itérations [00] : -1
Coefficient de viscosité [0.] : 0.23
Nombre de Courant maximum admis [-1.] : -1.
Tirant d'eau minimum [0.1] : 0.01
Nombre maximum d'itérations : 09
Facteur de réduction du pas de temps : 2
itérations à précision maximale : 99
Facteur de réduction de précision Z Q : 1+1 1+1
itérations avant basculement : 99
Borne d'erreur en cote pour la maille : 0.001
Valeur maximum du Froude : 5.
Bilan en volume par bief (O/N) : O 0.0001
Sections témoins (bie/sec) :
```

Solution exacte

Le calcul de la solution exacte nécessite une situation de géométrie simple, c'est-à-dire un canal sans pente de section rectangulaire régulière. De plus nous faisons l'hypothèse de « transmission instantanée de l'information » au niveau de la hauteur d'eau, en clair toute variation de la cote à l'aval sera instantanément appliquée à l'ensemble du canal. Ce cas peut se présenter lorsque la célérité est importante devant la longueur du canal.

Dans ces conditions, en appliquant un limnigramme linéaire à l'aval $Z_{aval}()=\lambda t+\mu$, (t étant exprimé en minutes), la solution est donnée par $y(x,t)=\lambda t+\mu$ et $Q(x,t)=-\lambda.L.x/60$. Ce qui donne, pour notre test, la solution suivante :

$$y(x,t)=\begin{cases} 1 & \text{si } 0\leq t\leq 20 \\ t/60+2/3 & \text{si } 20\leq t\leq 80 \\ t/30-2/3 & \text{si } 80<t\leq 140 \\ 4 & \text{si } t\geq 140 \end{cases} \quad Q(x,t)=\begin{cases} 0 & \text{si } 0\leq t\leq 20 \\ -Lx/3600 & \text{si } 20\leq t\leq 80 \\ -Lx/1800 & \text{si } 80<t\leq 140 \\ 0 & \text{si } t\geq 140 \end{cases} \tag{14.3}$$

Remarque :

L'hypothèse de « transmission instantanée » est vérifiée du fait du choix du pas de temps de calcul. En effet, en prenant un pas de temps de l'ordre de grandeur du temps que met la perturbation pour remonter jusqu'à l'amont, et en négligeant les frottements, on respecte correctement l'hypothèse. Il est alors préférable de réaliser ce test sur des biefs de faible longueur. On conserve ainsi des pas de temps raisonnables et une bonne précision dans les calculs.

Résultats

En ce qui concerne la hauteur d'eau, les résultats obtenus correspondent aux résultats attendus. En effet, on obtient à chaque pas de temps une ligne d'eau horizontale ayant pour cote la cote imposée à l'aval. Lors de la première simulation, on observe à t = 80,5 minutes un écart en cote de 0,1 millimètre entre l'amont et l'aval. Cette légère erreur intervient au moment d'un changement de pente du limnigramme. Lors de la deuxième simulation, on observe un écart, entre l'amont et l'aval de la ligne d'eau, à chaque changement de pente du limnigramme. l'écart maximum relevé est de 1 millimètre. Les résultats en hauteur d'eau sont donc très satisfaisants et respectent notre hypothèse de « transmission instantanée ». Toutefois, on note que le pas de temps de 30 secondes atteint sa limite pour un canal de longueur 50 mètres.

En ce qui concerne le débit, on compare le résultat obtenu à l'aval du canal avec la solution exacte. Le calcul exact donne :

$$\begin{array}{cc} 1^{ère}\,\text{simulation} & 2^{ème}\,\text{simulation} \\ Q_{aval}=\begin{cases} 0 & \text{si } \; 0\leq t<\;20 \\ -0{,}00556 & \text{si } 20\leq t<\;80 \\ -0{,}01111 & \text{si } 80\leq t<140 \\ 4 & \text{si } \qquad t\geq 140 \end{cases} & Q_{aval}=\begin{cases} 0 & \text{si } \; 0\leq t<\;20 \\ -0{,}02778 & \text{si } 20\leq t<\;80 \\ -0{,}05556 & \text{si } 80\leq t<140 \\ 0 & \text{si } \qquad t\geq 140 \end{cases} \end{array} \tag{14.4}$$

Les courbes de débits obtenues à l'aval, pour chaque simulation, montrent que MAGE fournit les solutions en escaliers qu'on attendait. De plus les valeurs des marches correspondent parfaitement aux valeurs exactes. Toutefois on remarque des erreurs, apparaissant sous forme d'oscillations, à chaque changement de pente du limnigramme. En effet, chaque changement de pente provoque une variation très brutale du débit, entraînant des difficultés de calcul.

```
================================================================================
Test n°3-1 : Réponse à un limnigramme linéaire - simulation 1 : bief court(10 m)
Date début simulation : 09/06/2021 (16:33:53)
================================================================================
=
 epsilon sur les cotes :   1.000000E-06
 epsilon sur les débits :   1.000000E-03

 Erreur sur les cotes en norme L1 :   0.000000E+00
 Erreur sur les débits aval en norme L1 :   2.501460E-04
 ATTENTION : on néglige les points au voisinage des sauts de débit, on vérifie
seulement les paliers.
 >>>>>>>>>> Le test n°3-simulation 1 est valide en norme L1

 Erreur sur les cotes en norme L_infinie :   0.000000E+00
 Erreur sur les débits aval en norme L_infinie :   4.751241E-04
 ATTENTION : on néglige les points au voisinage des sauts de débit, on vérifie
seulement les paliers.
 >>>>>>>>>> Le test n°3-simulation 1 est valide en norme L_infinie


================================================================================
Test n°3-2 : Réponse à un limnigramme linéaire - simulation 2 : bief long (50 m)
Date début simulation : 09/06/2021 (16:33:53)
================================================================================
 epsilon sur les cotes :   3.000000E-06
 epsilon sur les débits :   1.000000E-03

 Erreur sur les cotes en norme L1 :   1.498348E-06
 Erreur sur les débits aval en norme L1 :   6.750551E-05
 ATTENTION : on néglige les points au voisinage des sauts de débit, on vérifie
seulement les paliers.
 >>>>>>>>>> Le test n°3-simulation 1 est valide en norme L1

 Erreur sur les cotes en norme L_infinie :   2.299995E-06
 Erreur sur les débits aval en norme L_infinie :   4.409201E-04
 ATTENTION : on néglige les points au voisinage des sauts de débit, on vérifie
seulement les paliers.
 >>>>>>>>>> Le test n°3-simulation 2 est valide en norme L_infinie
```

14.4. TEST 4 – Écoulement Uniforme

À partir d'une condition à la limite aval en cote puis en loi de tarage, on établit un régime uniforme. On le compare alors avec la solution exacte.

Objectif du test

On contrôle, à travers ce test, le comportement de MAGE en régime permanent uniforme. Connaissant l'équation qui régit ce type d'écoulement, on détermine un régime uniforme particulier. En se plaçant dans ces conditions, on examine les résultats donnés par MAGE.

On réalise deux simulations à partir de conditions aux limites aval de types différents. On cherche donc à calculer le même écoulement uniforme avec une condition à la limite aval du type limnigramme, puis du type loi de tarage.

Description du canal

Afin d'obtenir un écoulement uniforme, on travaille à partir d'un canal uniforme de longueur 2000 mètres, de largeur 4 mètres et de pente 0.25 %.

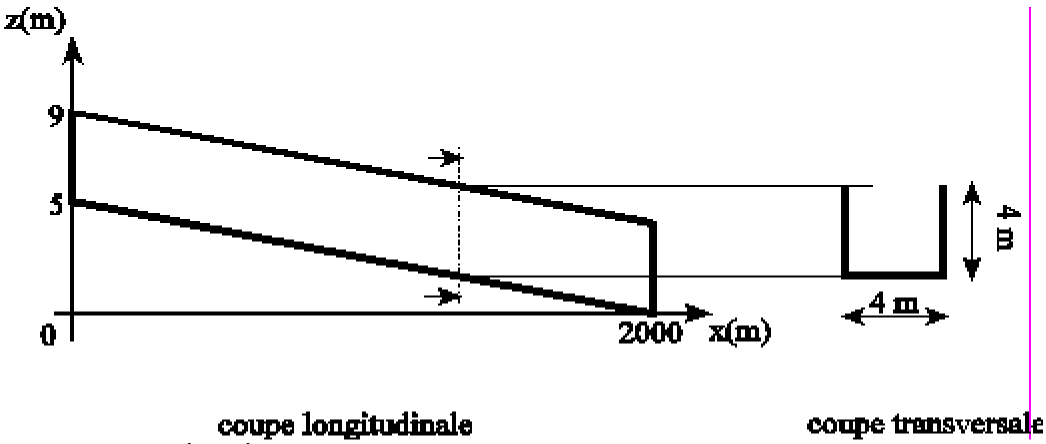


Figure 21 : géométrie pour le test n°4

Frottements

De façon à rester dans les conditions d'un écoulement uniforme, on définit uniformément un coefficient de Strickler sur toute la longueur du canal. On prend K = 40.

Équation

La solution exacte est ici donnée par l'équation de l'écoulement uniforme qui s'écrit :

$$Q = K\sqrt{I}\,L\,y\left(\frac{L\,y}{L+2\,y}\right)^{2\beta} \tag{14.5}$$

Solution

On se donne une hauteur d'eau constante sur tout le canal et on calcule le débit correspondant pour être en écoulement uniforme. Pour y = 2 m, on trouve Q = 16 m^3/s.

Conditions initiales

On laisse MAGE calculer lui-même l'état initial pour les conditions aux limites suivantes :

- Première simulation : Q = 10 m^3/s à l'amont et Z = 3 m à l'aval.
- Deuxième simulation : Q = 10 m^3/s à l'amont et la loi de tarage suivante à l'aval.

LOI DE TARAGE AVAL	
cote (mètres)	***débit (m^3/s)***
0,00	0,00
0,50	2,17
1,00	6,11
1,50	10,83
2,00	16,00
2,50	21,46
3,00	27,10
3,50	32,88

Conditions aux limites

Pour la première simulation, on se ramène aux conditions de l'écoulement uniforme en passant à Q = 16 m^3/s à l'amont et Z = 2 m à l'aval de la façon suivante :

HYDROGRAMME AMONT		*LIMNIGRAMME AVAL*	
temps (minutes)	***débit (m^3/s)***	***temps (minutes)***	***cote (mètres)***
0	10	0	3
30	12	60	2
60	16		

Pour la deuxième simulation, on cherche l'écoulement uniforme en se ramenant à Q = 16 m3/s à l'amont (même hydrogramme amont que pour la première simulation) et en conservant la loi de tarage utilisée pour obtenir la condition initiale.

Données numériques

- temps de simulation : 4 heures
- pas de temps : 300 secondes (pas de temps minimum 1 seconde)
- pas d'espace : 100 mètres (soit 21 sections de calcul).

Fichier NUM, 1ère simulation et 2e simulation

```
Parametre d'implicitation......[0.75].: 0.60 S B R Permanent
Instant initial en JJJ:HH:MIN:SS......: 000:00:00:00
```

```
 Instant final en JJJ:HH:MIN:SS........: 000:04:00:00
 Pas de temps en SECONDES.......[720.].:      300.0     1.000
 Pas de temps d'ecriture sur .TRA......:     3600.0
 Pas de temps d'ecriture sur .BIN......:      300.0       0.0   10000.0
 type des iterations..............[00].: -1
 Coefficient de sous relaxation...[0.].:    0.00000
 Nombre de courant maximum admis.[-1.].:   100000.0
 Tirant d'eau minimum...........[0.1].:      0.010
 Nombre maximum d'iterations...........: 10
 Facteur de reduction du pas de temps..:  2
 Iterations à precision maxi...........: 99
 Facteur de reduction de precision Z Q.: 1+0 1+0
 Iterations avant basculement..........: 99
 Borne d'erreur en cote pour la maille.:   -1.00000
 Valeur maximum du nombre de Froude....:      2.000
 Bilan en volume par bief........(O/N).: O    0.00100    1000.0
 Sections témoins (bie/sec) :
```

Résultats

En fin de chaque simulation, on aboutit au régime permanent uniforme souhaité, c'est à dire Q = 16 m³/s et y = 2 m sur toute la longueur du canal.

```
===============================================================================
Test n°4-1 : Calcul d'un écoulement uniforme - simulation 1 : C.L. aval = Z(t)
Date début simulation : 09/06/2021 (16:47:59)
===============================================================================
 epsilon :   1.000000E-05

 Erreur pour les lignes d'eau en norme L1 :   0.000000E+00
 >>>>>>>>>> Le test n°4-simulation 1 est valide en norme L1

 Erreur pour les lignes d'eau en norme L_infinie :   0.000000E+00
 >>>>>>>>>> Le test n°4-simulation 1 est valide en norme L_infinie

  Erreur  pour  les  volumes  en  norme  L1  :     0.000000E+00  (    1.600000E+01  ;
1.600000E+01)
 >>>>>>>>>> Le test n°4-simulation 1 est valide pour la constance du débit


===============================================================================
Test n°4-2 : Calcul d'un écoulement uniforme - simulation 2 : C.L. aval = Q(z)
Date début simulation : 09/06/2021 (16:47:59)
===============================================================================
 epsilon :   1.000000E-05

 Erreur pour les lignes d'eau en norme L1 :   0.000000E+00
 >>>>>>>>>> Le test n°4-simulation 2 est valide en norme L1

 Erreur pour les lignes d'eau en norme L_infinie :   0.000000E+00
 >>>>>>>>>> Le test n°4-simulation 2 est valide en norme L_infinie

  Erreur  pour  les  volumes  en  norme  L1  :     0.000000E+00  (    1.600000E+01  ;
1.600000E+01)
 >>>>>>>>>> Le test n°4-simulation 2 est valide pour la constance du débit
```

14.5. TEST 5 – Écoulement en Régime Permanent Fluvial

Dans les conditions de ce test, MAGE calcule un régime permanent. La ligne d'eau ainsi obtenue est comparée à la ligne d'eau calculée avec une grande précision par une méthode de Runge-Kutta.

Objectif du test

Le but de ce test est de vérifier le comportement de MAGE en régime permanent. En se plaçant dans le cas d'un canal à géométrie uniforme, on peut facilement calculer la solution exacte de l'écoulement. On compare alors la ligne d'eau fournie par MAGE avec la ligne d'eau exacte.

Description du canal

Le canal utilisé pour ce test est un canal de section rectangulaire, de longueur 5000 mètres, de largeur 200 mètres, avec une pente constante de 0.09 ‰.

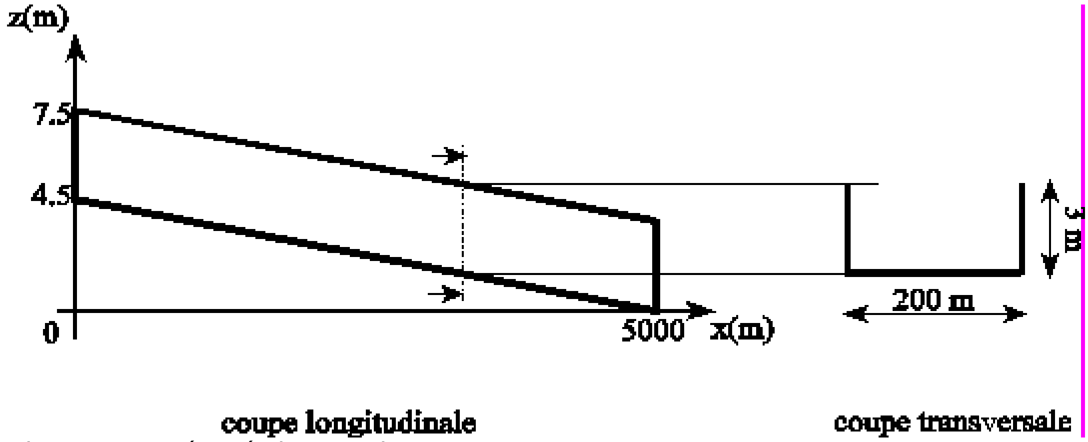


Figure 22 : géométrie pour le test n°5

Frottements

On choisit un coefficient de Strickler constant, K = 40, sur l'ensemble du canal.

Conditions aux limites

On impose un débit à l'amont, $Q = 240\ m^3/s$, et une cote à l'aval, Z = 2 m.

Équation

La ligne d'eau pour cet écoulement est solution de l'équation différentielle suivante

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{I - \dfrac{Q^2 (L+2y)^{4/3}}{K^2 L^{10/3} y^{10/3}}}{1 - \dfrac{Q^2}{g L^2 y^3}} \qquad (14.6)$$

alors que le débit est donné par $Q = Q_{amont}$.

Solution

La solution est obtenue par résolution de l'équation (14.6) suivant la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Cette méthode à l'avantage de donner des résultats d'une grande précision.

Conditions initiales

Pour l'étude de ce cas-test, nous avons réalisé deux simulations. l'objectif est de lancer le calcul à partir de conditions initiales différentes.

Les conditions initiales sont calculées par MAGE à partir des conditions aux limites à l'instant initial.

Pour la seconde simulation, nous sommes partis de l'écoulement uniforme pour un débit de 240 m^3/s à l'amont et une cote de 2,75 mètres à l'aval. Cette simulation nécessite d'adapter la condition limite aval, le passage de 2,75 mètres à 2 mètres se fait en 30 minutes.

Données numériques

- Première simulation
  - temps de simulation : 45 minutes
  - pas de temps : 60 secondes (pas de temps minimum 1 seconde)
  - pas d'espace : 20 mètres (soit 251 sections de calcul).
- Deuxième simulation
  - temps de simulation : 2 heures 30 minutes
  - pas de temps : 200 secondes (pas de temps minimum 1 seconde)
  - pas d'espace : 20 mètres (soit 251 sections de calcul).

Fichier NUM, 1ère simulation

```
Parametre d'implicitation......[0.75].: 0.60 S B R Permanent
Instant initial en JJJ:HH:MIN:SS......: 000:00:00:00
Instant final en JJJ:HH:MIN:SS........: 000:00:45:00
Pas de temps en SECONDES.......[720.].:      60.0     1.000
Pas de temps d'ecriture sur .TRA......:     180.0
Pas de temps d'ecriture sur .BIN......:      60.0       0.0   10000.0
type des iterations.............[00].: -1
Coefficient de sous relaxation...[0.].:   0.00000
Nombre de courant maximum admis.[-1.].:  100000.0
Tirant d'eau minimum...........[0.1].:     0.010
Nombre maximum d'iterations...........: 10
Facteur de reduction du pas de temps..:  2
Iterations à precision maxi...........: 99
Facteur de reduction de precision Z Q.: 1+0 1+0
Iterations avant basculement..........: 99
Borne d'erreur en cote pour la maille.:  -1.00000
Valeur maximum du nombre de Froude....:     2.000
Bilan en volume par bief........(O/N).: O    0.00100    1000.0
```

Fichier NUM, 2e simulation

```
Parametre d'implicitation......[0.75].: 0.60 S B R Permanent
Instant initial en JJJ:HH:MIN:SS......: 000:00:00:00
Instant final en JJJ:HH:MIN:SS........: 000:02:30:00
Pas de temps en SECONDES.......[720.].:     200.0     1.000
Pas de temps d'ecriture sur .TRA......:    1000.0
Pas de temps d'ecriture sur .BIN......:     200.0       0.0   10000.0
type des iterations.............[00].: -1
Coefficient de sous relaxation...[0.].:   0.00000
Nombre de courant maximum admis.[-1.].:  100000.0
Tirant d'eau minimum...........[0.1].:     0.010
Nombre maximum d'iterations...........: 10
Facteur de reduction du pas de temps..:  2
Iterations à precision maxi...........: 99
Facteur de reduction de precision Z Q.: 1+0 1+0
Iterations avant basculement..........: 99
```

```
 Borne d'erreur en cote pour la maille.:   -1.00000
 Valeur maximum du nombre de Froude....:      2.000
 Bilan en volume par bief........(O/N).: O    0.00100    1000.0
```

Résultats

En fin de simulation, le régime permanent est établi. On compare les hauteurs d'eau fournies par MAGE avec la solution calculée par la méthode de Runge-Kutta.

```
================================================================================
Test n°5-1 : Calcul d'un écoulement permanent non uniforme - simulation 1 (durée
45 minutes)
Date début simulation : 09/06/2021 (17:11:01)
================================================================================
 epsilon pour les lignes d'eau :   1.000000E-05
 epsilon pour les volumes :   1.000000E-04

 Erreur pour les lignes d'eau en norme L1 :   1.382323E-06
 >>>>>>>>>> Le test n°5-simulation 1 est valide en norme L1

 Erreur pour les lignes d'eau en norme L_infinie :   2.570036E-06
 >>>>>>>>>> Le test n°5-simulation 1 est valide en norme L_infinie

  Erreur  pour  les  volumes  en  norme  L1  :    4.153075E-05  (   6.480000E+05  ;
6.480269E+05)
 >>>>>>>>>> Le test n°5-simulation 1 est valide pour le bilan de volume E/S


================================================================================
Test n°5-2 : Calcul d'un écoulement permanent non uniforme - simulation 2 (durée
2h30)
Date début simulation : 09/06/2021 (17:11:01)
================================================================================
 epsilon pour les lignes d'eau :   1.000000E-05
 epsilon pour les volumes :   1.000000E-04

 Erreur pour les lignes d'eau en norme L1 :   2.192275E-06
 >>>>>>>>>> Le test n°5-simulation 2 est valide en norme L1

 Erreur pour les lignes d'eau en norme L_infinie :   5.500615E-06
 >>>>>>>>>> Le test n°5-simulation 2 est valide en norme L_infinie

  Erreur  pour  les  volumes  en  norme  L1  :    1.380355E-07  (   2.160000E+06  ;
2.400085E+06 ;   1.389109E+06 ;   1.149024E+06)
 >>>>>>>>>> Le test n°5-simulation 2 est valide pour le bilan de volume E/S
```

14.6. TEST 6 – Canal Horizontal avec Seuil de Fond

Ce cas présente la particularité de disposer d'une solution analytique permettant d'étudier la précision du calcul de la ligne d'eau.

Objectif du test

Tester la précision de MAGE lors d'un calcul de ligne d'eau en régime fluvial.

Description du canal

On modélise un canal rectangulaire de longueur 40 mètres et de largeur 3 mètres. Ce canal a la particularité de posséder un seuil de fond décrit ci-dessous.

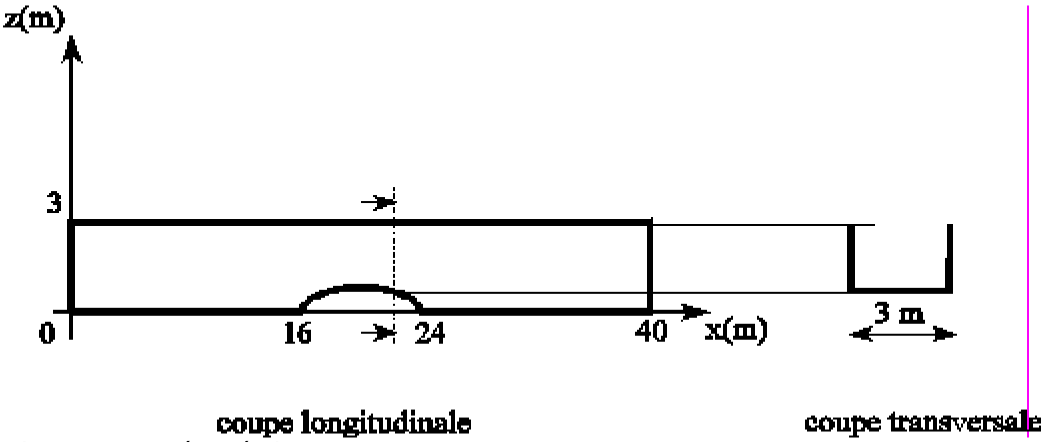


Figure 23 : géométrie pour test n°6

On définit le fond du canal par sa cote :

$$Z_f(x) = \begin{cases} 0{,}48 - 0{,}03(x-20)^2 & \text{si } 16 \leq x \leq 24 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{14.7}$$

Frottements

Pour se placer dans des conditions de glissement, il nous suffit de choisir un coefficient de Strickler très grand. On prend K = 999.

Conditions aux limites

On impose à l'amont un débit de 10 m³/s et à l'aval une cote de 2 mètres.

Solution analytique

La solution en fonction de l'abscisse en long est donnée par

$$\begin{cases} Q(x) &= Q_{\text{amont}} \\ y(x) &= -2\sqrt{\alpha(x)}\cos\left(\dfrac{\theta(x)+2\pi}{3}\right) - \dfrac{Z_f(x)-B}{3} \end{cases} \tag{14.8}$$

où on note :

$$A = \frac{Q_{\text{amont}}^2}{2gL^2} \qquad B = y_{\text{aval}} + \frac{A}{y_{\text{aval}}^2} + Z_{f_{\text{aval}}}$$
$$\alpha(x) = \frac{\left(Z_f(x) - B\right)^2}{9} \quad \gamma(x) = \frac{2\left(Z_f(x) - B\right)^3 + 27A}{54} \quad \theta(x) = \arccos\left(\frac{\gamma(x)}{\sqrt{\alpha^3(x)}}\right) \tag{14.9}$$

Conditions initiales

On fournit à MAGE une ligne d'eau horizontale (Z = 2 m), et un débit constant sur toute la longueur du canal (Q = 10 m^3/s).

Données numériques

- temps de simulation : 5 minutes
- pas de temps : 5 secondes (pas de temps minimum 0,1 seconde)
- pas d'espace :
  - 1ère simulation : 0,5 mètre (soit 81 sections de calcul)
  - 2e simulation : 0,25 mètre (soit 161 sections de calcul)
  - 3e simulation : 0,25 mètre (soit 161 sections de calcul)
- description du seuil :
  - 1ère simulation : 0,5 mètre
  - 2e simulation : 0,5 mètre
  - 3e simulation : 1 mètre

Fichier NUM, pour les 3 simulations

```
Parametre d'implicitation......[0.75].: 0.70 S B R Permanent
Instant initial en JJJ:HH:MIN:SS......: 000:00:00:00
Instant final en JJJ:HH:MIN:SS........: 000:00:05:00
Pas de temps en SECONDES.......[720.].:        5.0     1.000
Pas de temps d'ecriture sur .TRA......:       20.0
Pas de temps d'ecriture sur .BIN......:       20.0       0.0   10000.0
type des iterations..............[00].: -1
Coefficient de sous relaxation...[0.].:    0.00000
Nombre de courant maximum admis.[-1.].:   100000.0
Tirant d'eau minimum............[0.1].:      0.010
Nombre maximum d'iterations...........: 10
Facteur de reduction du pas de temps..:  2
Iterations à precision maxi...........: 99
Facteur de reduction de precision Z Q.: 1+0 1+0
Iterations avant basculement..........: 99
Borne d'erreur en cote pour la maille.:   -1.00000
Valeur maximum du nombre de Froude....:      2.000
Bilan en volume par bief........(O/N).: O    0.00100       1000.0
```

Résultats

À la fin de la simulation, on a atteint le régime permanent. On peut donc comparer les résultats de MAGE avec la solution analytique. Seule la 3e simulation avec une représentation trop grossière du seuil donne un résultat médiocre.

===

```
Test n°6-1 : Canal horizontal avec seuil de fond parabolique - simulation 1
             Pas des profils : 0,5 ; discrétisation : 0,5
Date début simulation : 09/06/2021 (17:39:07)
============================================================================
 epsilon pour les lignes d'eau :   1.000000E-03

 Erreur pour les lignes d'eau en norme L1 :   5.447628E-05
 >>>>>>>>>> Le test n°6-simulation 1 est valide en norme L1

 Erreur pour les lignes d'eau en norme L_infinie :   1.967753E-04
 >>>>>>>>>> Le test n°6-simulation 1 est valide en norme L_infinie


================================================================
Test n°6-2 : Canal horizontal avec seuil de fond - simulation 2
             Pas des profils : 0,5 ; discrétisation : 0,25
Date début simulation : 09/06/2021 (17:39:07)
================================================================
 epsilon pour les lignes d'eau :   1.000000E-03

 Erreur pour les lignes d'eau en norme L1 :   9.434765E-05
 >>>>>>>>>> Le test n°6-simulation 2 est valide en norme L1

 Erreur pour les lignes d'eau en norme L_infinie :   7.817147E-04
 >>>>>>>>>> Le test n°6-simulation 2 est valide en norme L_infinie


================================================================
Test n°6-3 : Canal horizontal avec seuil de fond - simulation 3
             Pas des profils : 1,0 ; discrétisation : 0,25
Date début simulation : 09/06/2021 (17:39:07)
================================================================
 epsilon pour les lignes d'eau :   1.000000E-03

 Erreur pour les lignes d'eau en norme L1 :   2.847545E-04
 >>>>>>>>>> Le test n°6-simulation 3 est valide en norme L1

 Erreur pour les lignes d'eau en norme L_infinie :   3.034542E-03
 ########## Le test n°6-simulation 3 n'est pas valide en norme L_infinie
```

14.7. TEST 7 – Oscillations d'une marée dans un estuaire

Ce cas-test d'écoulement transitoire a été le sujet d'études aboutissant à la formulation d'une solution analytique approchée. Par comparaison des solutions, on se fait une idée des vitesses de propagation obtenues avec MAGE.

Objectif du test

On étudie ici le comportement de MAGE dans un cas non-stationnaire dont on connaît l'expression analytique d'une solution approchée. Ce test consiste à chercher l'écoulement dans un estuaire soumis à une marée sinusoïdale. On compare alors les résultats obtenus avec ceux donnés par la solution approchée.

Description du canal

Le bief représente un estuaire de longueur 10 000 mètres, de section rectangulaire de largeur 1000 mètres, et de pente nulle. On considère de plus que l'estuaire est fermé à l'amont.

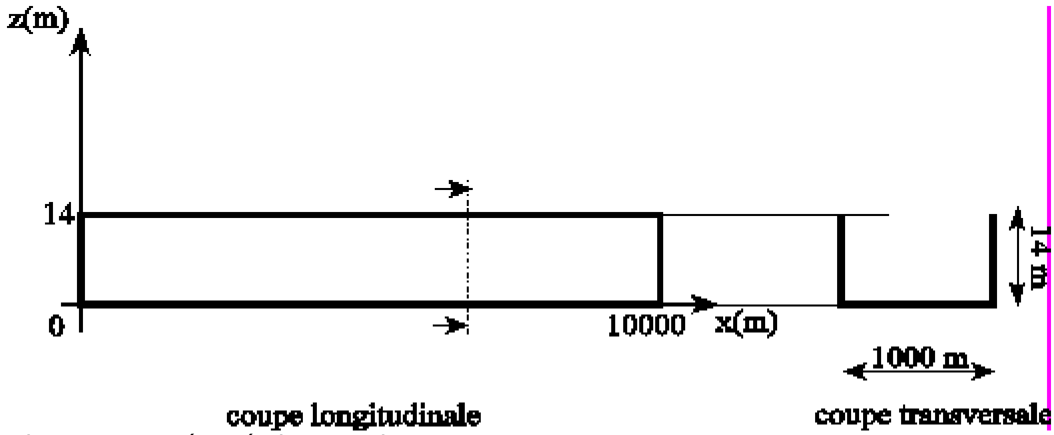


Figure 24 : géométrie pour le test n°7

Frottement

On prend pour coefficient de Strickler K = 44.77. Cette valeur n'est pas prise au hasard, elle est en fait calculée de manière à nous placer dans les conditions de l'obtention de la solution analytique approchée. Ce calcul est donné au paragraphe « Solution analytique approchée ».

Conditions aux limites

L'estuaire étant fermé à l'amont, un débit nul s'impose comme condition limite amont. On soumet à l'aval une marée sinusoïdale d'amplitude 1 mètre et de période 12 heures. Cette marée est donnée par l'expression :

$$Z(t)=h+a\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \tag{14.10}$$

où h est la hauteur d'eau moyenne valant 7,5 mètres, a est l'amplitude valant 1 mètre et T est la période valant 12 heures.

Remarque :

Cette marée est fournie à MAGE par une seule période introduite par pas de 30 minutes pour t allant de 0 à 720 minutes.

Conditions initiales

On part d'une ligne d'eau horizontale à Z = 8.5 mètres et d'un débit nul sur toute la longueur du bief.

Solution analytique approchée

En 1957, J. Proudman a donné une solution analytique approchée pour ce problème. Les hypothèses faites sont :

(i) la section en travers est uniforme ;

(ii) le fond de l'estuaire est horizontal ;

(iii) la vitesse est indépendante du frottement ;

(iv) la marée à l'entrée de l'estuaire est harmonique.

Le système d'équations résolu par Proudman est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[(h+\zeta)u\right] &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+g\frac{\partial \zeta}{\partial x} &= \frac{-k}{h}|u|u \end{aligned} \tag{14.11}$$

La solution approchée de ce système, exprimée en variation de hauteur d'eau et vitesse, en réponse à une marée d'amplitude *2hA* est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\zeta}{h}=2A\cos\left(\frac{\omega x}{c}\right)\cos(\omega t)+A^2\Bigg\{\left[\frac{-2\omega B}{c}+\frac{4\omega^3}{3}c^3(B^3+3Bx^2)\right]\sin(2\omega x)+\frac{\omega^2}{c^2}(B^2-x^2) \\ +\frac{\omega^2}{c^2}(B^2+3x^2)\cos(2\omega t)+\frac{4k\omega^2}{3hc^2}(B^3-x^3)|\sin(\omega t)|\sin(\omega t)\Bigg\} \end{aligned} \tag{14.12}$$

$$\begin{aligned} \frac{u}{c} &= 2A\sin\left(\frac{\omega x}{c}\right)\sin(\omega t) \\ &+A^2\left\{\left[\frac{-2\omega x}{c}+\frac{2\omega^3}{c^3}\left(B^2x+\frac{5}{3}x^3\right)\right]\sin(2\omega t)+\frac{4\omega^2 Bx}{c^2}\cos(2\omega t)\right\} \end{aligned} \tag{14.13}$$

où c est la célérité donnée par $c=\sqrt{gh}$, B est la longueur de l'estuaire et k est pris égal à 0,0025.

Si T est la période de la marée, ω est défini par $\omega=\frac{2\pi}{T}$.

Remarque :

Proudman précise qu'il est nécessaire, pour que cette solution donne une approximation valide de la solution théorique, que $\frac{\omega B}{c}A$ et $\frac{k\omega^2B^3}{hc^2}A$ soient petits et que $\frac{\omega B}{c}<1$.

Pour que le système résolu par MAGE corresponde au système résolu par Proudman, il suffit de prendre $K=\sqrt{\frac{g}{kh^{1/3}}}$

La solution, exprimée en hauteur d'eau et débit, est alors donnée par :

$$\begin{aligned} y(x,t) &= h+\zeta(x,t) \\ Q(x,t) &= L\,y(x,t)u(x,t) \end{aligned} \tag{14.14}$$

Dans notre cas, cette solution approche correctement la solution théorique puisque les conditions citées en remarque sont vérifiées : $\frac{\omega B}{c}A=0{,}0113$, $\frac{k\omega^2 B^3}{hc^2}A=0{,}0064$ et $\frac{\omega B}{c}=0{,}1696$ avec $A=\frac{1}{2h}$

Données numériques

- temps de simulation : 2 jours
- pas de temps : 300 secondes (pas de temps minimum 1 seconde)
- pas d'espace : 200 mètres (soit 51 sections de calcul).

Fichier NUM

```
Parametre d'implicitation......[0.75].: 0.99 S B R Permanent
Instant initial en JJJ:HH:MIN:SS......: 000:00:00:00
Instant final en JJJ:HH:MIN:SS........: 002:00:00:00
Pas de temps en SECONDES.......[720.].:      300.0     1.000
Pas de temps d'ecriture sur .TRA......:     3600.0
Pas de temps d'ecriture sur .BIN......:      300.0
type des iterations.............[00].: -1
Coefficient de sous relaxation...[0.].:    0.000
Nombre de courant maximum admis.[-1.].:       -1.0
Tirant d'eau minimum...........[0.1].:      0.100
Nombre maximum d'iterations...........:  9
Facteur de reduction du pas de temps..:  2
Iterations à precision maxi...........: 99
Facteur de reduction de precision Z Q.: 1+0 1+0
Iterations avant basculement..........: 99
Borne d'erreur en cote pour la maille.:   -1.00000
Valeur maximum du nombre de Froude....:      2.000
Bilan en volume par bief........(O/N).: O    0.00100    1000.0
```

Résultats

Ce qui nous intéresse avant tout, c'est l'évolution de la hauteur d'eau du côté fermé de l'estuaire et l'évolution du débit à l'embouchure. On compare alors les résultats de MAGE avec ceux calculés à partir de la solution analytique approchée. Les courbes nous montrent la bonne concordance des résultats : amplitudes et périodicités sont respectées. Une observation plus minutieuse des résultats montre toutefois des écarts, ce qui ne doit pas étonner puisque la solution analytique est elle-même une solution approchée.

L'observation des courbes d'évolution de la vitesse en différentes sections de calcul montre que celle-ci est correctement estimée. L'amplitude et la périodicité des courbes fournies par MAGE coïncident avec celles des courbes obtenues à partir de la solution analytique, ce qui nous laisse penser que la vitesse de propagation de l'onde de marée est convenablement évaluée.

Si on compare l'écart en volume entre la ligne d'eau initiale et la ligne d'eau finale et le volume de l'hydrogramme aval, on obtient une erreur en volume de l'ordre de 9 % avec un volume entrant d'environ 70000 m^3.

Le meilleur résultat est obtenu pour un coefficient θ de 0,99.

Remarque : pour des longueurs de biefs différentes, on peut observer la réflexion de l'onde de marée sur la condition à la limite amont qui a pour conséquence de produire un limnigramme amont périodique dont l'amplitude est supérieure à celle du marégramme aval.

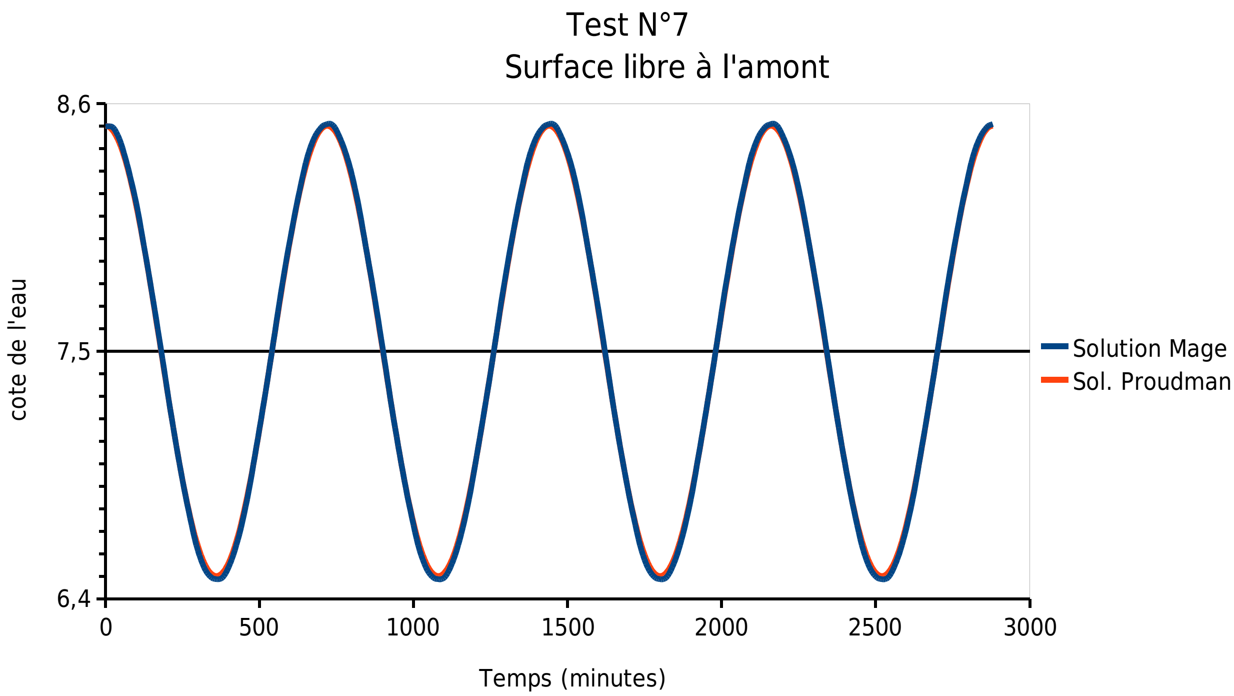


Figure 25 : comparaison des niveaux amont calculés par MAGE et par la méthode de Proudman

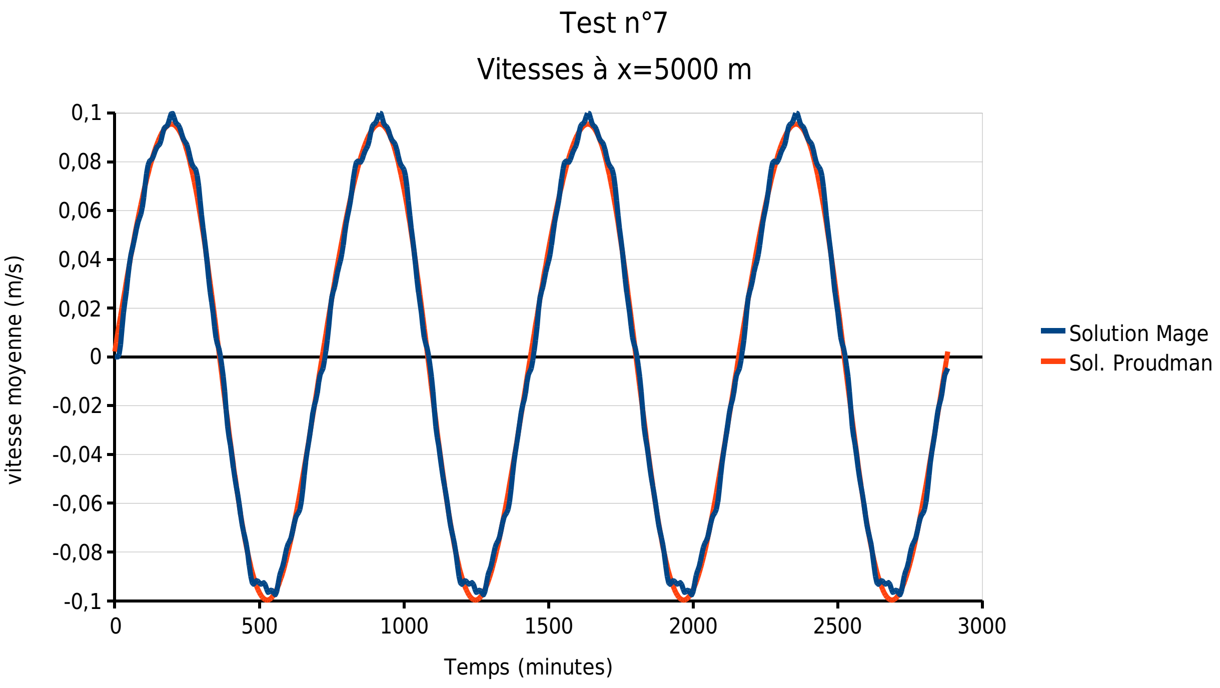


Figure 26 : comparaison des vitesses à l'abscisse 5000, milieu du canal

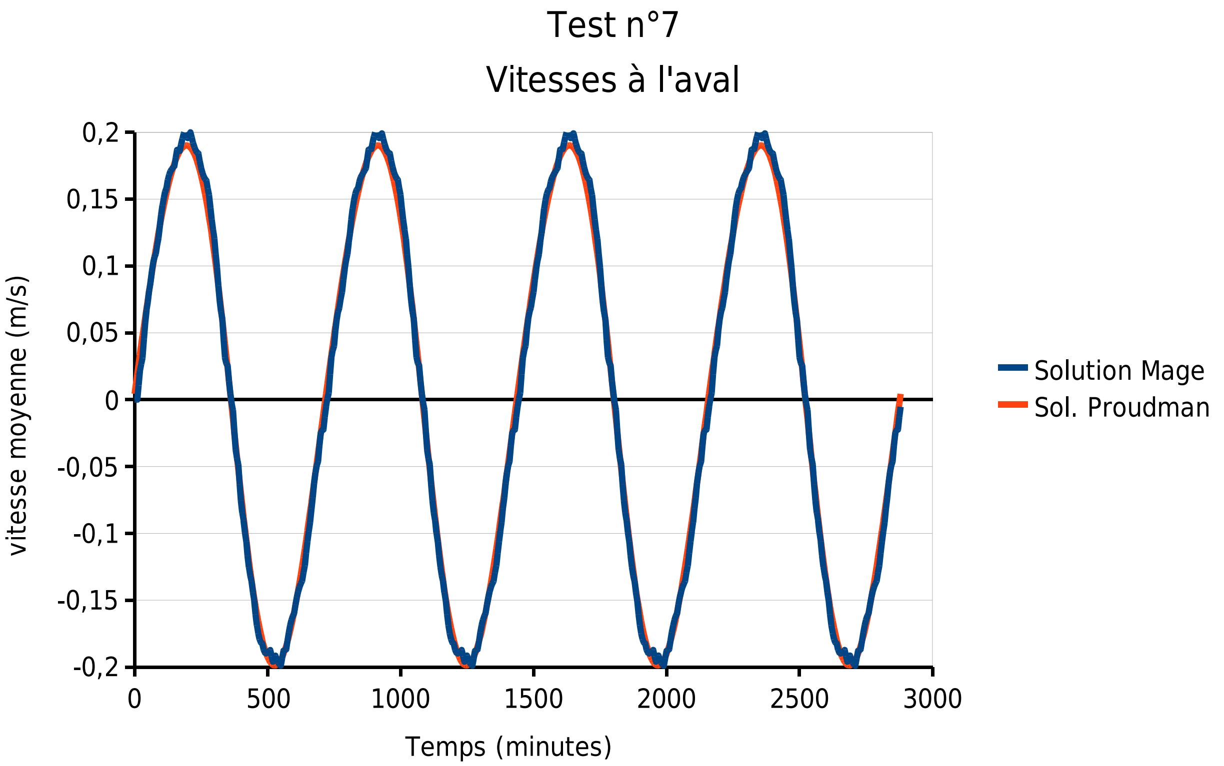


Figure 27 : comparaison des vitesses à l'aval

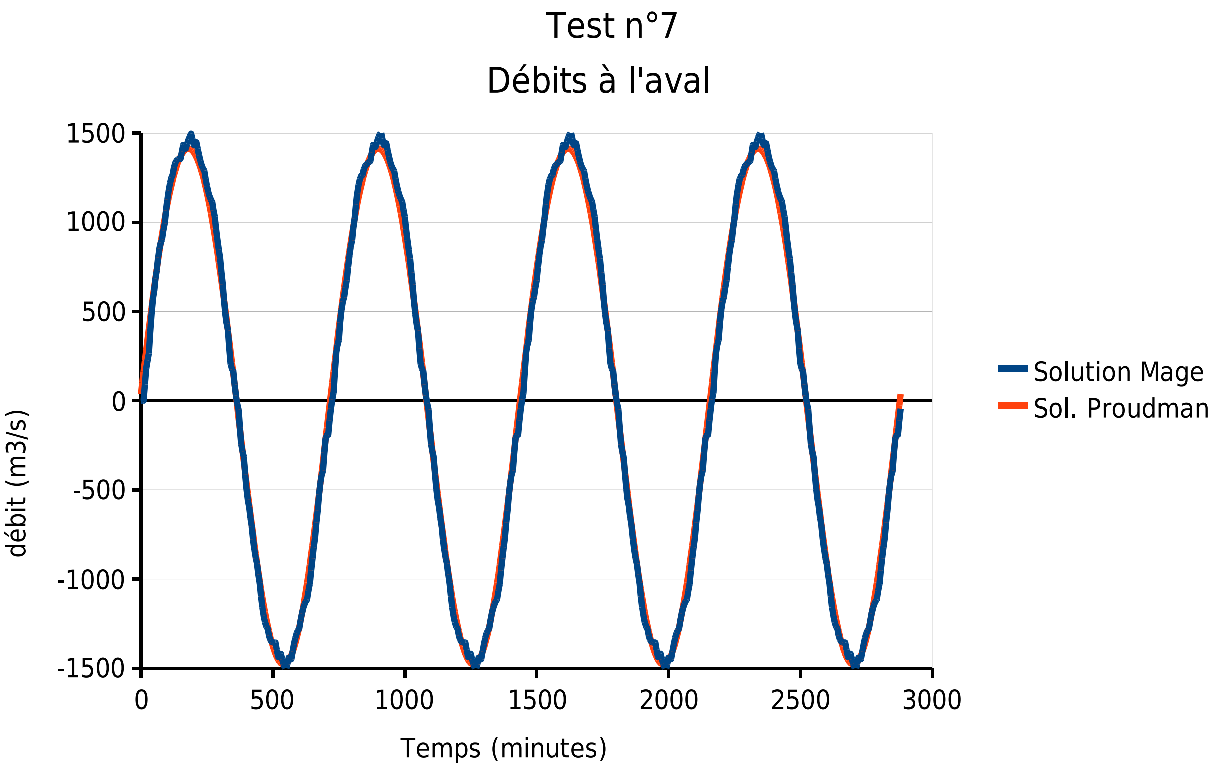


Figure 28 : comparaison des débits à l'aval

```
==========================================================
Test n°7 : oscillation d'une marée dans un estuaire
           Attention la solution approchée de Proudman
           ne prévoit pas le décalage temporel à l'amont
Date début simulation : 10/06/2021 (11:43:12)
==========================================================
 epsilon pour les niveaux, vitesses et débits :   1.000000E-02

 Erreur pour les niveaux amont en norme L1 :   1.269936E-03
 Erreur pour les vitesses en x=5000 en norme L1 :   4.384736E-02
 Erreur pour les vitesses à l'aval en norme L1 :   4.255942E-02
 Erreur pour les débits à l'aval en norme L1 :   4.309589E-02
 ########## Le test n°7 n'est pas valide en norme L1

 Erreur pour les niveaux amont en norme L_infinie :   2.442131E-03
 Erreur pour les vitesses en x=5000 en norme L_infinie :   1.145111E-01
 Erreur pour les vitesses à l'aval en norme L_infinie :   9.526102E-02
 Erreur pour les débits à l'aval en norme L_infinie :   1.084962E-01
 ########## Le test n°7 n'est pas valide en norme Infinie
```

14.8. TEST 8 - Rupture de Barrage sur Fond Plat

On dispose pour ce test de la solution exacte. On vérifie alors la vitesse de propagation de l'onde de submersion calculée par MAGE, sachant que le phénomène de rupture de barrage sort du domaine d'application du logiciel.

Objectif du test

Ce test nous permet d'étudier le comportement de *MAGE* lors d'un écoulement transitoire avec une forte discontinuité. On s'intéresse à la propagation d'une onde de submersion due à une rupture instantanée de barrage sur fond plat, dont on connaît la solution exacte. Cet exemple est extrait de la thèse de J.P. Vila.

Description du canal

On modélise un canal rectangulaire de pente nulle, de longueur 60 mètres, de largeur 4,905 mètres et de profondeur 1 mètre.

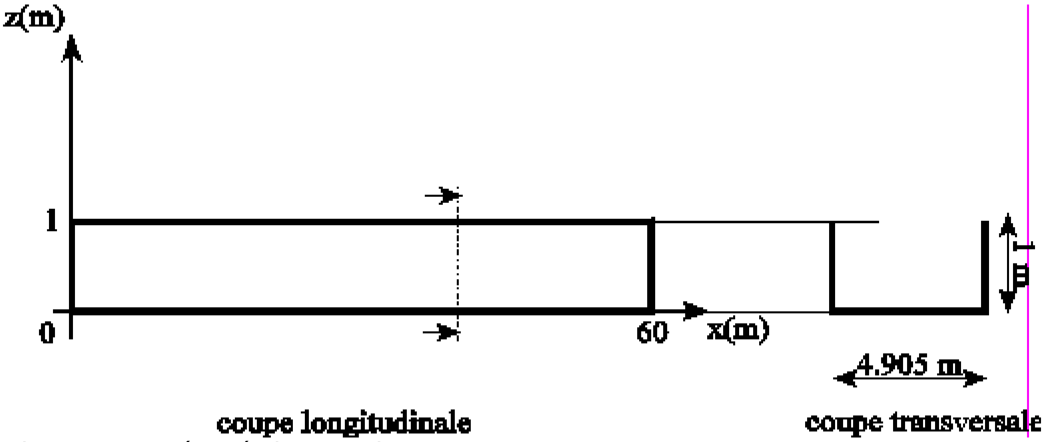


Figure 29 : géométrie pour le test n°8

Frottement

On simule l'absence de frottement en prenant un coefficient de Strickler très grand. On fixe $K = 999\ 999$.

Conditions aux limites

Afin de ne considérer que le phénomène de rupture, on impose un débit nul à l'amont. On fixe à l'aval la cote Z = 0,042474 mètres correspondant à la section mouillée S = 5/24 m^2

Conditions initiales

On fournit comme condition initiale, l'état avant la rupture du barrage. Cet état est décrit par :

$$
\begin{aligned}
0 \le x \le 30 \Rightarrow S &= \frac{37}{24} + \frac{5}{2\sqrt{3}} \ m^2 \text{ et } Q = 0 \ m^3/s \\
30 \le x \le 60 \Rightarrow S &= \frac{5}{24} \ m^2 \text{ et } Q = 0 \ m^3/s
\end{aligned} \tag{14.15}
$$

Ce qui donne, vu la géométrie du canal :

$$
\begin{aligned}
0 \le x \le 30 &\Rightarrow y = 0{,}608571 \ m \text{ et } Q = 0 \ m^3/s \\
30 \le x \le 60 &\Rightarrow y = 0{,}042474 \ m \text{ et } Q = 0 \ m^3/s
\end{aligned} \tag{14.16}
$$

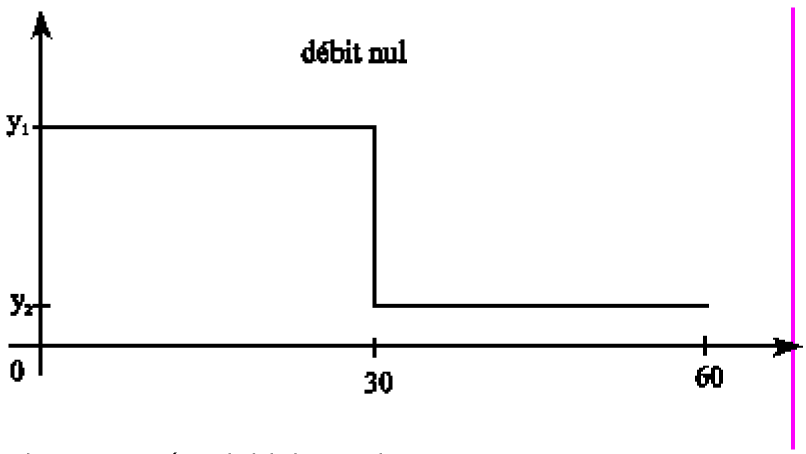


Figure 30 : état initial pour le test n°8

Solution exacte

Un tel écoulement est solution du problème de Riemann :

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x} F(U) = 0 \\
U(x,0) = \begin{cases} U_L \text{ si } x < 30 \\ U_R \text{ si } x > 30 \end{cases}
\end{cases}
\quad \text{ou} \quad U = (S, Q)^t \text{ et } F(U) = \left(Q, \frac{Q^2}{S} + p(S) \right)^t \ \ p(S) = S^2 \tag{14.17}
$$

La particularité de cet exemple est que l'on peut déterminer la solution exacte du problème de Riemann. Cette solution est constituée d'une onde de détente et d'un ressaut mobile de vitesse $\sigma = \dfrac{5}{2}$ séparés par un état constant $U_* = \left(\dfrac{25}{24}, \dfrac{25}{12} \right)^t$. La figure suivante représente la solution dans le plan (x, t).

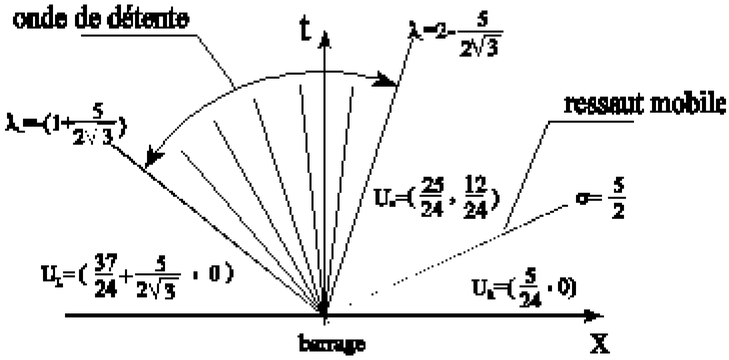


Figure 31 : solution analytique pour le test n°8

Données numériques

– temps de simulation : 10 secondes
– pas de temps : 0,1 seconde (pas de temps minimum 0,01 seconde)
– pas d'espace : 0,6 mètre (soit 101 sections de calcul).

Remarque :

Un temps de simulation assez court est nécessaire. En effet, on évite ainsi la propagation de la vague de submersion jusqu'à l'aval du canal où on a fixé une condition à la limite constante égale au niveau à l'instant initial. Il est clair que cette contrainte est incompatible avec la variation du niveau provoqué par l'arrivée de la vague.

Fichier NUM

```
Parametre d'implicitation.......[0.7].: 0.95 S B R
Instant initial en JJJ:HH:MIN:SS......: 000:00:00:00
Instant final en JJJ:HH:MIN:SS........: 000:00:00:10
Pas de temps en SECONDES.......[300.].:        0.1     0.010
Pas de temps d'ecriture sur .TRA......:        1.0
Pas de temps d'ecriture sur .BIN......:        1.0       0.0   10000.0
type des iterations.............[00].: -1
Coefficient de lissage...........[0.].:    0.20000
Nombre de courant maximum admis.[-1.].:        1.0
Tirant d'eau minimum...........[0.01].:      0.010
Nombre maximum d'iterations...........: 99
Facteur de reduction du pas de temps..:  2
Iterations a precision maxi...........: 99
Facteur de reduction de precision Z Q.: 1+0 1+0
Iterations avant basculement..........: 99
Borne d'erreur en cote pour la maille.:   -1.00000
Valeur maximum du nombre de Froude....: 200000.000
Bilan en volume par bief........(O/N).: N    0.00100    1000.0
```

Résultats

On compare les résultats (hauteurs d'eau et débits) fournis par MAGE avec la solution exacte, aux instants t = 4,8 s et t = 8 s.

L'écoulement était torrentiel, la médiocrité des résultats fournis par MAGE était prévisible. Toutefois, l'allure générale des courbes obtenues, et surtout la position du front de la vague de submersion restent satisfaisantes.

Figure 32: ligne d’eau à t = 8s calculée avec un coefficient de lissage de 0,2

14.9. TEST 9 – Évolution d’une ligne d’eau Gaussienne

Dans un canal aux extrémités fermées, on étudie l’évolution d’une ligne d’eau initialement de forme gaussienne.

Objectif du test

Ce test permet de valider le comportement de MAGE face à une propagation d’onde. Pour ce faire, on laisse évoluer librement une ligne d’eau de forme gaussienne dans un bassin. Ne disposant pas de solution analytique pour cet écoulement particulier, on peut tout de même contrôler la réflexion de l’onde sur les parois, ainsi que la conservation de la masse.

Description du canal

Le bassin est modélisé par un bief à fond plat de section rectangulaire, de longueur 200 mètres, de largeur 50 mètres et de profondeur 6 mètres.

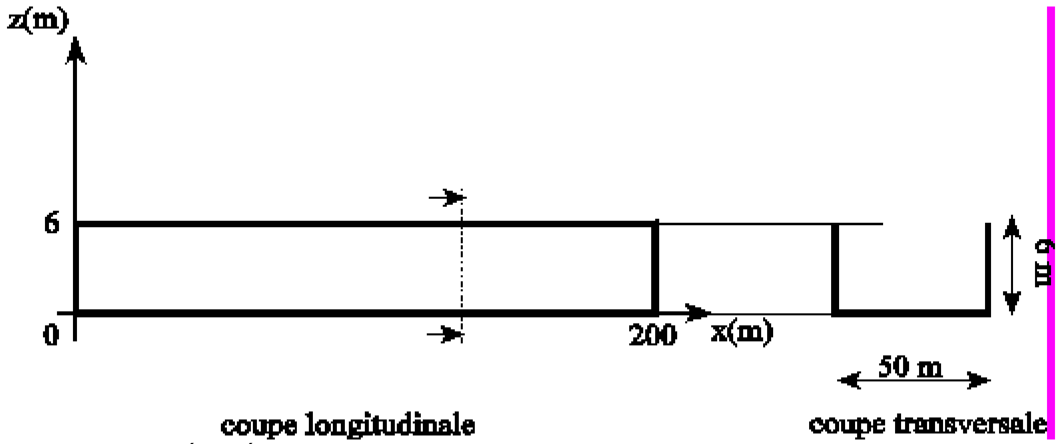


Figure 33 : géométrie pour le test n°9

Frottement

Afin de simuler l’absence de frottement, on prend pour coefficient de Strickler une valeur très grande. Pour ce test, K = 999.

Conditions aux limites

Afin de simuler la paroi « amont » du bassin, on impose un débit nul comme condition limite amont. La paroi « aval » du bassin est modélisée par une courbe de tarage à débit nul.

Conditions initiales

La ligne d’eau gaussienne est définie par la cote $Z(x)=2+3\cdot e^{-\frac{(x-100)^2}{80}}$ et le débit est pris nul dans tout le bassin.

Remarque :

On rappelle que x représente l’abscisse longitudinale dont l’origine est prise à l’amont. La ligne d’eau initiale est donc décrite pour des valeurs de x allant de 0 à 200 mètres.

Données numériques

– temps de simulation : 15 minutes
– pas de temps : 2 secondes (pas de temps minimum 0,1 seconde)
– pas d'espace : 2 mètres (soit 101 sections de calcul).

Fichier NUM

```
 Parametre d'implicitation......[0.75].: 0.70 S B R
 Instant initial en JJJ:HH:MIN:SS......: 000:00:00:00
 Instant final en JJJ:HH:MIN:SS........: 000:00:15:00
 Pas de temps en SECONDES.......[720.].:        2.0     0.100
 Pas de temps d'ecriture sur .TRA......:       60.0
 Pas de temps d'ecriture sur .BIN......:        2.0       0.0   10000.0
 type des iterations.............[00].: -1
 Coefficient de sous relaxation...[0.].:    0.00000
 Nombre de courant maximum admis.[-1.].:   100000.0
 Tirant d'eau minimum...........[0.1].:      0.010
 Nombre maximum d'iterations...........: 10
 Facteur de reduction du pas de temps..:  2
 Iterations à precision maxi...........: 99
 Facteur de reduction de precision Z Q.: 1+0 1+0
 Iterations avant basculement..........: 99
 Borne d'erreur en cote pour la maille.:   -1.00000
 Valeur maximum du nombre de Froude....:      2.000
 Bilan en volume par bief........(O/N).: O    0.00100    1000.0
```

Résultats

Les courbes de lignes d'eau montrent l'évolution la surface libre au cours du temps. On observe la propagation de l'onde, sa réflexion sur les parois, ainsi que la diminution de l'ampleur du phénomène en fonction du temps. Les courbes de vitesses respectives montrent l'évolution du sens de l'écoulement et confirment les observations faites sur les courbes de lignes d'eau. On remarque de plus la parfaite symétrie des résultats (lignes d'eau et vitesses).

Il est très difficile de valider les résultats obtenus, toutefois ceux-ci correspondent à l'attente que l'on peut avoir de l'évolution d'une surface libre gaussienne dans de telles conditions.

```
============================================================
Test n°9 : évolution d'une ligne d'eau initiale gaussienne
           vérification de la symétrie des z(t) et
           de l'antisymétrie des v(t)
Date début simulation : 10/06/2021 (13:03:45)
============================================================
 epsilon pour les limnigrammes et vitesses :   1.000000E-07

 Erreur pour les niveaux en norme L1 :   0.000000E+00
 >>>>>>>>>> Le test n°9 est valide en norme L1

 Erreur pour les niveaux en norme L_infinie :   0.000000E+00
 >>>>>>>>>> Le test n°9 est valide en norme L_infinie

 Erreur pour les vitesses en norme L1 :   1.677372E-16
 >>>>>>>>>> Le test n°9 est valide en norme L1

 Erreur pour les vitesses en norme L_infinie :   1.879663E-15
 >>>>>>>>>> Le test n°9 est valide en norme L_infinie
```

14.10. TEST 11 – Nœuds à surface non-nulle

On teste les possibilités de stockage à partir de différentes descriptions de nœuds à surface non nulle. On s'assure que la conservation de la masse totale est vérifiée.

Objectif du test

On réalise deux séries de tests mettant en évidence l'influence de la loi cotes-surfaces, décrivant un nœud à surface non nulle, sur les calculs fait par MAGE. On procède alors de la manière suivante : pour différentes lois cotes-surfaces décrivant des nœuds cylindriques puis coniques, on contrôle la conservation de la masse sur l'ensemble du réseau. On teste ainsi l'importance de la variation de surface du nœud sur la simulation.

Description du canal

Le réseau est constitué de deux biefs identiques reliés par un nœud à surface non nulle. Chaque bief est long de 10 000 mètres, de pente 0,03 % et de section rectangulaire de largeur 50 mètres.

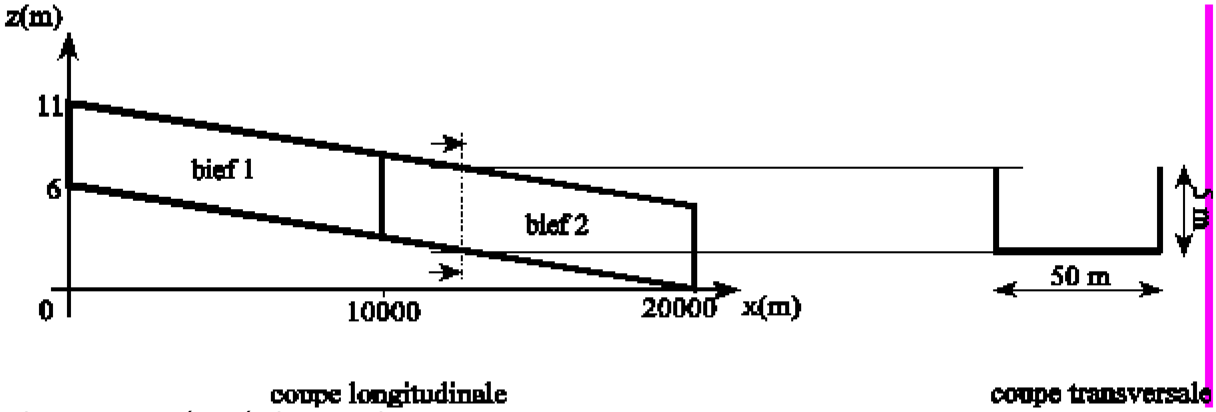


Figure 34 : géométrie pour le test n°11

Description des nœuds à surface non nulle

La première série est composée de trois tests réalisés à partir de différentes valeurs de variation de la surface du nœud. Pour chaque test on fait deux simulations, une première avec stockage initial (loi cotes-surfaces commençant sous la surface libre initiale) puis une seconde sans stockage initial (loi cotes-surfaces commençant au-dessus de la surface libre initiale). Les lois cotes-surfaces utilisées sont les suivantes :

Premier test : nœud cylindrique $\frac{\partial S}{\partial Z}=0$

Avec stockage initial		*Sans stockage initial*	
cote (m)	***surface (ha)***	***cote (m)***	***surface (ha)***
4	10	5	10
7	10	8	10

Deuxième test : nœud conique $\frac{\partial S}{\partial Z} \approx 33333$

Avec stockage initial		*Sans stockage initial*	
cote (m)	***surface (ha)***	***cote (m)***	***surface (ha)***
4	10	5	10
7	20	8	20

Troisième test : nœud conique $\frac{\partial S}{\partial Z} \approx 66666$

Avec stockage initial		*Sans stockage initial*	
cote (m)	***Surface (ha)***	***cote (m)***	***surface (ha)***
4	10	5	10
7	30	8	30

La deuxième série reprend les tests des nœuds coniques en imposant nulle la surface du premier point décrivant la loi cotes-surfaces. Les nœuds sont alors décrits de la manière suivante :

Quatrième test : nœud conique $\frac{\partial S}{\partial Z} \approx 33333$ ***et*** $S_{initiale} = 0$

Avec stockage initial		*Sans stockage initial*	
cote (m)	***surface (ha)***	***cote (m)***	***surface (ha)***
4	0	5	0
7	10	8	10

Cinquième test : nœud conique $\frac{\partial S}{\partial Z} \approx 66666$ ***et*** $S_{initiale} = 0$

Avec stockage initial		*Sans stockage initial*	
cote (m)	***surface (ha)***	***cote (m)***	***surface (ha)***
4	0	5	0
7	20	8	20

Frottement

On prend un coefficient de Strickler commun aux deux biefs : K = 25.

Conditions initiales

L'écoulement permanent calculé par MAGE pour les conditions aux limites Q = 50 m3/s à l'amont du bief 1 et Z = 3 m à l'aval du bief 2 est pris comme condition initiale pour nos séries de tests.

Conditions aux limites

On impose à l'aval du bief 2 la cote Z = 3 m, et on fixe à l'amont du bief 1 l'hydrogramme suivant :

HYDROGRAMME AMONT DU BIEF 1	
temps (minutes)	***débit (m^3/s)***
0	50
30	50
90	150

Données numériques

– temps de simulation : 1 journée
– pas de temps : 720 secondes (pas de temps minimum 1 seconde)
– pas d'espace : 500 mètres (soit 21 sections de calcul par bief).

Fichier NUM

Les fichiers NUM utilisés pour ces simulations sont tous identiques :

```
Paramètre d'implicitation [0.65] : 0.65 S B R
Instant initial en MINUTES [0.] : 000:00:00:00
Instant final en MINUTES [60.] : 001:00:00:00
Pas de temps en SECONDES [720.] : 720. 1.
Pas de temps d'écriture sur. TRA : 720.
Pas de temps d'écriture sur. BIN : 720.
Type des itérations [0] : -1
Coefficient de viscosité [0.] : 0.
Nombre de Courant maximum admis [-1.] : -1.
Tirant d'eau minimum : 0.1
Nbre max d'itération : 8
Facteur de réduction du pas de temps : 2
itérations à précision maximale : 99
Facteur de réduction de précision : 2+1 2+1
itérations avant basculement : 99
Borne d'erreur en cote pour la maille : 0.001
Valeur maximum du Froude : 5.
Bilan en volume par bief (O/N) : O 0.0001
Sections témoins :
```

Résultats

Pour chaque simulation, on fait un bilan de volume sur l'ensemble du réseau. On exprime ainsi l'erreur de conservation de la masse totale commise (la masse volumique étant supposée constante). Cette erreur de volume est ensuite transcrite en erreur relative. Les formules utilisées pour ces calculs sont :

$$\Delta V = \left|V_{initial} + V_{entrant} - V_{sortant} - V_{final}\right|$$
$$E = \frac{\Delta V}{V_{entrant}} \times 100 \tag{14.18}$$

les volumes stockés au nœud étant comptabilisés dans les volumes initiaux et finaux.

```
============================================================================
Test n°11-1a : Noeud à surface non-nulle cylindrique avec stockage initial
Date début simulation : 11/06/2021 (16:11:31)
============================================================================
 epsilon pour l'erreur relative :   1.000000E-03
 Erreur relative sur le bilan de volume :   5.018204E-08
 Erreur absolue sur le bilan de volume :   6.322937E-01
 >>>>>>>>>> Le test n°11-1a est valide

============================================================================
Test n°11-1s : Noeud à surface non-nulle cylindrique sans stockage initial
Date début simulation : 11/06/2021 (16:11:32)
============================================================================
 epsilon pour l'erreur relative :   1.000000E-03
 Erreur relative sur le bilan de volume :  -7.959504E-05
 Erreur absolue sur le bilan de volume :  -1.002898E+03
 >>>>>>>>>> Le test n°11-1s est valide

================================================================================
Test n°11-2a : Noeud à surface non-nulle conique (dS/dz=33333) avec stockage
initial
Date début simulation : 11/06/2021 (16:11:32)
================================================================================
 epsilon pour l'erreur relative :   1.000000E-03
 Erreur relative sur le bilan de volume :  -5.784256E-05
 Erreur absolue sur le bilan de volume :  -7.288163E+02
 >>>>>>>>>> Le test n°11-2a est valide

================================================================================
Test n°11-2s : Noeud à surface non-nulle conique (dS/dz=33333) sans stockage
initial
Date début simulation : 11/06/2021 (16:11:32)
================================================================================
 epsilon pour l'erreur relative :   1.000000E-03
 Erreur relative sur le bilan de volume :  -1.263665E-04
 Erreur absolue sur le bilan de volume :  -1.592218E+03
 >>>>>>>>>> Le test n°11-2s est valide

================================================================================
Test n°11-3a : Noeud à surface non-nulle conique (dS/dz=66666) avec stockage
initial
Date début simulation : 11/06/2021 (16:11:33)
================================================================================
 epsilon pour l'erreur relative :   1.000000E-03
 Erreur relative sur le bilan de volume :  -1.070292E-04
 Erreur absolue sur le bilan de volume :  -1.348569E+03
 >>>>>>>>>> Le test n°11-3a est valide

================================================================================
Test n°11-3s : Noeud à surface non-nulle conique (dS/dz=66666) sans stockage
initial
```

```
Date début simulation : 11/06/2021 (16:11:33)
================================================================================
 epsilon pour l'erreur relative :   1.000000E-03
 Erreur relative sur le bilan de volume :  -1.696023E-04
 Erreur absolue sur le bilan de volume :  -2.136989E+03
 >>>>>>>>>> Le test n°11-3s est valide

================================================================================
Test n°11-4a : Noeud à surface non-nulle conique (dS/dz=33333) avec stockage
initial
Date début simulation : 11/06/2021 (16:11:33)
================================================================================
 epsilon pour l'erreur relative :   1.000000E-03
 Erreur relative sur le bilan de volume :  -1.229306E-04
 Erreur absolue sur le bilan de volume :  -1.548926E+03
 >>>>>>>>>> Le test n°11-4a est valide

================================================================================
Test n°11-4s : Noeud à surface non-nulle conique (dS/dz=33333) sans stockage
initial
Date début simulation : 11/06/2021 (16:11:33)
================================================================================
 epsilon pour l'erreur relative :   1.000000E-03
 Erreur relative sur le bilan de volume :  -1.118476E-04
 Erreur absolue sur le bilan de volume :  -1.409280E+03
 >>>>>>>>>> Le test n°11-4s est valide

================================================================================
Test n°11-5a : Noeud à surface non-nulle conique (dS/dz=66666) avec stockage
initial
Date début simulation : 11/06/2021 (16:11:34)
================================================================================
 epsilon pour l'erreur relative :   1.000000E-03
 Erreur relative sur le bilan de volume :  -1.703536E-04
 Erreur absolue sur le bilan de volume :  -2.146456E+03
 >>>>>>>>>> Le test n°11-5a est valide

================================================================================
Test n°11-5s : Noeud à surface non-nulle conique (dS/dz=66666) sans stockage
initial
Date début simulation : 11/06/2021 (16:11:34)
================================================================================
 epsilon pour l'erreur relative :   1.000000E-03
 Erreur relative sur le bilan de volume :  -1.604529E-04
 Erreur absolue sur le bilan de volume :  -2.021707E+03
 >>>>>>>>>> Le test n°11-5s est valide
```

Remarques générales

Il ressort des trois premiers tests deux constatations. Tout d'abord, les calculs sont plus précis lorsqu'il y a stockage initial au nœud. La phase d'amorçage du remplissage semble donc introduire des erreurs dans le calcul, erreurs dues au passage brutal d'une surface de stockage nulle à une surface de stockage non nulle importante.

On constate ensuite que plus la valeur de dS/dL est importante, plus l'erreur relative augmente. Cette constatation rejoint la première dans le sens où un dS/dL important signifie une variation de surface brutale entraînant des difficultés de calcul.

Le quatrième et le cinquième test confirment les difficultés de passage d'une surface nulle à une surface non nulle importante. En effet, si la première surface décrivant la loi cotes-surfaces est nulle le stockage au nœud commence progressivement. On constate alors que l'erreur est plus faible et est du même ordre de grandeur que s'il y a stockage initial au nœud.

Précisons enfin que les erreurs constatées restent toutefois très inférieures à 1 % et restent donc acceptables.

14.11. TEST 12 – Ouvrages

On s'assure de la bonne intégration des ouvrages hydrauliques au modèle de calcul. Les ouvrages testés sont le déversoir (seuil), l'orifice, les vannes, l'orifice voute, le seuil trapézoïdal, la buse, le déversoir latéral et les pompes.

Objectif du test

Notre objectif est de tester la prise en compte d'ouvrages singuliers (déversoirs, vannes, pompes…) dans la modélisation d'un réseau. l'écoulement, au niveau de ces ouvrages, n'étant plus gouverné par les équations de Saint-Venant, il est impossible de connaître la moindre solution analytique. On contrôle alors la loi de conservation de la masse totale dans le réseau. On vérifie également le comportement des ouvrages à partir des courbes résultant du calcul.

Tous les ouvrages sont testés dans les mêmes conditions (même canal, mêmes conditions aux limites). Seules la définition de l'ouvrage et la condition initiale changent d'une simulation à l'autre.

Description du canal

Le canal est représenté par un bief de longueur 5000 mètres, de section rectangulaire de largeur 30 mètres, et de pente 0.8 %.

Conditions initiales

Les conditions initiales sont celles du au régime permanent correspondant aux conditions aux limites à l'instant initial.

Données numériques

- temps de simulation : 2 jours
- pas de temps : 300 secondes pour les 2 premiers cas et 60 secondes pour le 3^{e} (déversoir latéral + pompes)
- pas d'espace : 100 mètres.

Fichier NUM

```
Parametre d'implicitation.......[0.7].: 0.70 S B R
Instant initial en JJJ:HH:MIN:SS......: 000:00:00:00
Instant final en JJJ:HH:MIN:SS........: 002:00:00:00
Pas de temps en SECONDES.......[300.].:     300.0     1.000
Pas de temps d'ecriture sur .TRA......:     300.0
Pas de temps d'ecriture sur .BIN......:     300.0       0.0   10000.0
type des iterations..............[00].: -1
Coefficient de lissage...........[0.].:   0.00000
Nombre de courant maximum admis.[-1.].:  100000.0
Tirant d'eau minimum...........[0.01].:     0.010
Nombre maximum d'iterations...........: 99
Facteur de reduction du pas de temps..:  2
Iterations a precision maxi...........: 99
Facteur de reduction de precision Z Q.: 1+0 1+0
Iterations avant basculement..........: 99
Borne d'erreur en cote pour la maille.:  -1.00000
Valeur maximum du nombre de Froude....:     2.000
Bilan en volume par bief........(O/N).: O    0.00100    1000.0
```

Résultats

Dans un premier temps, on vérifie la loi de conservation de la masse totale. Pour cela on réalise un bilan de volume qui se traduit par une variation de volume et une erreur relative données par les formules :

$$\Delta V = |V_{entrant} - V_{sortant}|$$
$$E = \frac{\Delta V}{V_{entrant}} \times 100 \tag{14.19}$$

où le volume entrant (respectivement sortant) est constitué du volume entrant à l'amont du canal (respectivement sortant à l'aval du canal) auquel s'ajoute, s'il y a lieu, le volume gagné (respectivement perdu) au niveau de l'ouvrage (c'est le cas pour le déversoir latéral et les pompes).

```
==============================================================================
Test n°12-a : Vérification des lois d'ouvrage pour seuils, orifices et vannes
Date début simulation : 11/06/2021 (16:28:18)
==============================================================================
 epsilon pour l'erreur relative :   1.000000E-05
 Erreur relative sur les lois d'ouvrage :   3.926000E-06
 >>>>>>>>>> Le test n°12-a est valide pour le fonctionnement des ouvrages
 Erreur relative sur la conservation de la masse :   4.573978E-10
 >>>>>>>>>> Le test n°12-c est valide pour la conservation de la masse

================================================================================
Test n°12-b : Vérification des lois d'ouvrage pour seuils, buses, orifices voute
et déversoir trapézoïdal
Date début simulation : 11/06/2021 (16:28:19)
================================================================================
 epsilon pour l'erreur relative :   1.000000E-05
 Erreur relative sur les lois d'ouvrage :   4.682000E-07
 >>>>>>>>>> Le test n°12-b est valide pour le fonctionnement des ouvrages
 Erreur relative sur la conservation de la masse :   1.829591E-10
 >>>>>>>>>> Le test n°12-c est valide pour la conservation de la masse

================================================================================
Test n°12-c : Vérification des lois d'ouvrage pour pompes et déversoirs latéraux
Date début simulation : 11/06/2021 (16:28:19)
================================================================================
 epsilon pour l'erreur relative :   1.000000E-05
 Erreur relative sur les lois d'ouvrage :   5.689000E-08
 >>>>>>>>>> Le test n°12-c est valide pour le fonctionnement des ouvrages
 Erreur relative sur la conservation de la masse :   3.528458E-06
 >>>>>>>>>> Le test n°12-c est valide pour la conservation de la masse
```

15. Bibliographie

[1] CUNGE J. A., HOLLY F.M., et al. (1980) « Practical aspects of computational river hydraulics – Chapitre 3 » Livre chez Pitman, London, UK

[2] LYN D.A., GOODWIN P. (1987) « Stability of a general Preissmann scheme » Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 113, No.1, January, 1987

[3] BAUME J.P. « Modélisation des ouvrages de type : déversoir, vanne, orifice, dans les modèles d'hydraulique à surface libre ». CEMAGREF MONTPELLIER.

[4] BAUME J.P. et POCHAT R. « Notes de cours – Hydraulique Fluviale ». Ministère de l'agriculture.

[5] COLLINS N.I. « Dynamic flow modelling, comparison & evaluation of current models – Final report-". ACADS Publication, 1989.

[6] CUNGE J.A. « Simulation des écoulements non permanents dans les rivières et canaux ». Institut National Polytechnique de Grenoble, 1988.

[7] DHATT G., BEZIER F., BOUTTES F. et ZHANG B.N. « Modèle hydrodynamique bidimensionnel aux éléments finis : REFLUX – Cahier de validation n°2 ». Université de Technologie de Compiègne, Division M.N.M., 1991.

[8] GALLAND J.C., HERVOUET J.M., ROUGE D. et THELLIER P. « Code TELEMAC version 1.0 – Note de validation ». EDF-DER, Département L.N.H., 1991.

[9] KHALADI A. « Modélisation des ouvrages hydrauliques dans les modèles d'hydraulique à surface libre ». CEMAGREF LYON, Rapport de DEA de Mécanique, Septembre 1988.

[10] NICOLET G. et UAN M. « Écoulements permanents à surface libre en lits composés ». La Houille Blanche N°1, 1979.

[11] POCHAT R. « Cours d'hydraulique générale – écoulements à surface libre ». Juillet 1979.

[12] POCHAT R. « École d'été de mécanique des fluides – Hydraulique à surface libre – ". ENGREF Hanoï 1980.

[13] PROUDMAN J. « Oscillations of tide and surge in an estuary of finite length ». Journal of Fluid Mechanics, Vol. 2, 1957.

[14] RAHUEL J.L. « Modélisation de l'évolution du lit des rivières alluvionnaires à granulométrie étendue ». Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Grenoble 1988.

[15] SAMUELS P.G. and SKEELS C.P. « Stability limits for Preissmann scheme ». Journal Of Hydraulic Engineering, Vol. 116, No 8, August 1990.

[16] STRADIOTTO S. « Modélisation des plaines d'inondation par un modèle monodimensionnel d'écoulement en rivière ». CEMAGREF LYON, Rapport de DEA de Thermique et Énergétique, Septembre 1992.

[17] VILA J.P. « Sur la théorie et l'approximation numérique de problèmes hyperboliques non linéaires, applications aux équations de Saint-Venant et à la modélisation des avalanches de neige dense ». Thèse de doctorat de l'université PARIS VI, Sciences Mathématiques, 1986.

[18] VILA J.P. « Hight-order schemes and entropy condition for nonlinear hyperbolic systems of conservation laws ». Mathematics of Computation, Vol. 50, January 1988.

16. Annexes

16.1. Annexe 1 : établissement des équations de Saint-Venant

Les équations sont établies par bilan sur un volume de contrôle constitué d'une infime partie de l'écoulement, compris entre deux sections distantes de Δx, que l'on suit dans son mouvement pendant le temps Δt.

16.1.1. Équation de continuité

La loi de conservation de la masse totale permet d'obtenir l'équation de continuité. Cette loi peut être exprimée par :

$$m_{finale} = m_{initiale} + m_{entrée} + m_{échange\_latéral} - m_{sortie}$$

où $m_{échange\_latéral}$ est comptée positivement en cas d'apport et négativement en cas de fuite.

Les masses de volume d'eau en question s'expriment :

masse du volume entrant :	$\rho \cdot Q(x,t) \cdot \Delta t$
masse du volume sortant :	$\rho \cdot Q(x+\Delta x,t) \cdot \Delta t$
masse du volume initial :	$\rho \cdot S(x,t) \cdot \Delta x$
masse du volume final :	$\rho \cdot S(x,t+\Delta t) \cdot \Delta x$
masse du volume d'échange latéral :	$\rho \cdot q_e(x,t) \cdot \Delta x \cdot \Delta t$

où q_e désigne le débit d'échange latéral par unité de longueur $q_e = q_a - q_D - \frac{\partial S_S}{\partial t}$ avec :

- q_a le débit unitaire d'apport ou de fuite ($q_a>0$ en cas d'apport et $q_a<0$ en cas de fuite).
- q_D le débit unitaire d'échange entre le lit mineur-moyen et les casiers latéraux de stockage ($q_D>0$ si on remplit le casier et $q_D<0$ si on vidange le casier) ;
- $\frac{\partial S_S}{\partial t}$ le débit d'échange entre le lit mineur-moyen et le lit majeur.

La conservation de la masse totale s'écrit donc :

$$\rho[S(x,t+\Delta t) - S(x,t)]\Delta x + \rho[Q(x+\Delta x,t) - Q(x,t)]\Delta t = \rho\, q_e(x,t)\Delta x \Delta t \tag{16.1}$$

d'où

$$\frac{S(x,t+\Delta t) - S(x,t)}{\Delta t} + \frac{Q(x+\Delta x,t) - Q(x,t)}{\Delta x} = q_e(x,t) \tag{16.2}$$

En faisant tendre Δx et Δt vers zéro, on obtient l'équation de continuité :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_e \tag{16.3}$$

16.1.2. Équation dynamique

Cette équation s'obtient en appliquant le théorème des quantités de mouvement à notre volume de contrôle. Ce théorème, en projection sur l'axe d'écoulement, s'écrit :

$$\frac{d(mV)_{Ox}}{dt}=\sum\left(F_{\text{extérieures}}\right)_{Ox} \tag{16.4}$$

On écrit alors les différentes quantités de mouvement intervenant :
- quantité de mouvement perdue : $\beta\cdot[\rho Q(x,t)\Delta t]V(x,t)$
- quantité de mouvement gagnée : $\beta(x+\Delta x,t)\cdot[\rho Q(x+\Delta x,t)\Delta t]V(x+\Delta x,t)$
- variation de quantité de mouvement :
  $\rho S(x,t+\Delta t).\Delta x.V(x,t+\Delta t)-\rho S(x,t).\Delta x.V(x,t)$
- variation de quantité de mouvement due aux échanges latéraux :
  - en cas de fuite la vitesse est égale à la vitesse de l'écoulement :
    $-\rho.q_e(x,t).\Delta x.\Delta t.V(x,t)$
  - en cas d'apport à la partie dynamique, la vitesse est nulle en projection sur l'axe d'écoulement, d'où une variation de quantité de mouvement nulle.

On résume cette variation de quantité de mouvement en l'écrivant :

$$-k.\rho.q_e(x,t).\Delta x.\Delta t.V(x,t) \text{ où } k=\begin{cases}1 \text{ si } q_e<0\\ 0 \text{ si } q_e\geqslant 0\end{cases} \tag{16.5}$$

La variation totale de quantité de mouvement s'écrit alors, au deuxième ordre près :

$$\begin{aligned}\Delta(mV)=&\rho\left[\beta(x+\Delta x,t).Q(x+\Delta x,t).V(x+\Delta x,t)-\beta(x,t).Q(x,t).V(x,t)\right].\Delta t\\ &+\rho\left[S(x+\Delta x,t).V(x+\Delta x,t)-S(x,t).V(x,t)\right]\\ &-k.\rho.q_e(x,t).V(x,t).\Delta x.\Delta t\end{aligned} \tag{16.6}$$

d'où

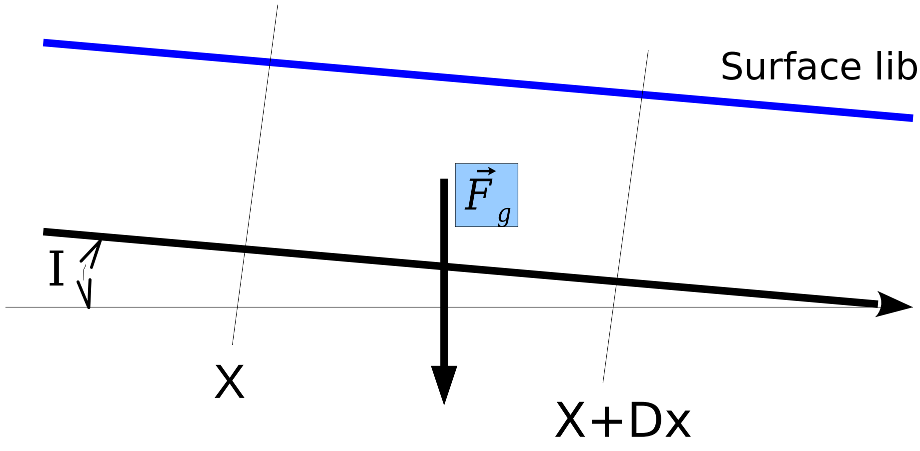
$$\begin{aligned}\frac{\Delta(mV)}{\Delta t}=\rho.\Delta x\Bigg[&\frac{\beta(x+\Delta x,t).Q(x+\Delta x,t).V(x+\Delta x,t)-\beta(x,t).Q(x,t).V(x,t)}{\Delta x}\\ &+\frac{S(x,t+\Delta t).V(x,t+\Delta t)-S(x,t).V(x,t)}{\Delta t}\\ &-k.\rho.q_e(x,t).V(x,t)\Bigg]\end{aligned} \tag{16.7}$$

En faisant tendre Δx et Δt vers zéro, on a l'estimation :

$$\frac{d(mV)}{dt}=\rho\Delta x\left[\frac{\partial(\beta.Q.V)}{\partial x}+\frac{\partial(S.V)}{\partial t}-k.q_e.V\right] \tag{16.8}$$

Il nous reste maintenant à estimer les forces extérieures en projection sur l'axe de l'écoulement.

16.1.2.1. Force de gravité



On a :

$$\vec{F}_g = m \cdot \vec{g} \text{ et } m = \rho . S(x,t) . \Delta x \tag{16.9}$$

ce qui donne en projection sur l'axe d'écoulement :

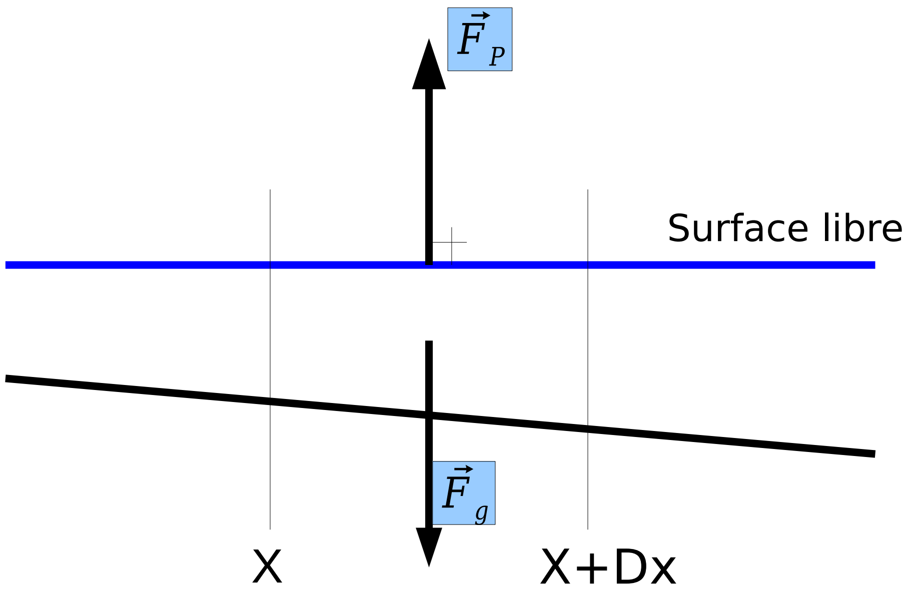
$$F_{gOx} = m \cdot g \cdot \sin(I) \tag{16.10}$$

soit encore d'après l'hypothèse que l'écoulement est presque horizontal :

$$F_{gOx} = \rho . g . S(x,t) . \Delta x . I \tag{16.11}$$

16.1.2.2. Force de pression

L'hypothèse de la répartition de la pression hydrostatique permet de dire que la résultante des forces de pression s'exerçant sur notre volume de contrôle est la même qu'en statique. Or en statique la surface libre est horizontale et les forces en présence sont la gravité $\vec{F}_g$ et la pression $\vec{F}_P$



l'équilibre se traduit par :

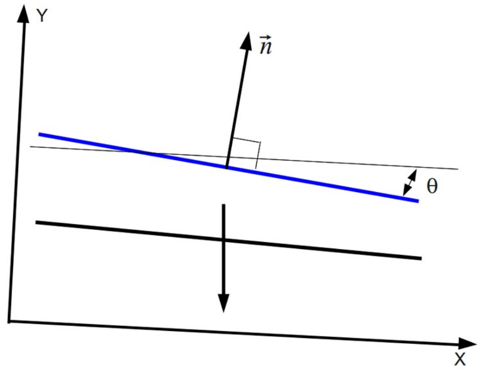
$$\vec{F}_P+\vec{F}_g= 0 \tag{16.12}$$

d'où

$$|F_P|=\rho . g \cdot S(x,t) \cdot \Delta x \tag{16.13}$$

et $\vec{F}_P$ est perpendiculaire à la surface libre.

Ce résultat est donc valable pour notre volume de contrôle, mais la surface libre n'est plus nécessairement horizontale. On en cherche donc une normale.



On a $\vec{n}=\begin{pmatrix}-\sin(\theta)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix}$, et compte tenu de l'hypothèse d'écoulement presque horizontal, $\cos\theta\approx 1$ et $\sin\theta\approx\theta=\frac{\partial y}{\partial x}$. Alors la normale s'écrit $\vec{n}=\begin{pmatrix}-\frac{\partial y}{\partial x}\\ 1\end{pmatrix}$, d'où :

$$F_{pOx}=-\rho . g . S(x,t) . \Delta x . \frac{\partial y}{\partial x} \tag{16.14}$$

16.1.2.3. Force de frottements

Les frottements sont estimés à partir de la formule de Manning-Strickler :

$$F_{fOx}=-\rho . g . S(x,t) . \Delta x . J \tag{16.15}$$

16.1.2.4. Perte de charge singulière

La perte de charge par élargissement brusque fait intervenir :

$$F_{eOx}=-\rho . g . S(x,t) . \Delta x . J_S \tag{16.16}$$

16.1.2.5. Bilan

Connaissant toutes les forces extérieures intervenant, il est possible d'écrire le théorème des quantités de mouvement :

$$\rho . \Delta x . \frac{\partial(\beta Q V)}{\partial x}+\frac{\partial(SV)}{\partial t}-k . q_e . V=\rho \Delta x S . g . I-S . g . \frac{\partial y}{\partial x}-g . S . J-g . S . J_S \tag{16.17}$$

En écrivant $I=\frac{dZ_f}{dx}$ et $Z=Z_f+y$

on trouve :

$$\frac{\partial(SV)}{\partial t}+\frac{\partial(\beta QV)}{\partial x}+gS\frac{\partial Z}{\partial x} = -gS(J+J_S)+k\,q_e V \tag{16.18}$$

Enfin comme $Q=SV$ on obtient l'équation dynamique :

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial(\beta Q^2/S)}{\partial x}+gS\frac{\partial Z}{\partial x} = -gS(J+J_S)+k\,q_e V \tag{16.19}$$

16.1.3. Le système complet

Le système composé de l'équation de continuité et de l'équation dynamique est appelé système de Saint-Venant. Ce système, exprimé en une dimension d'espace, rend compte des écoulements transitoires filaires à surface libre. Il est également possible de l'obtenir par intégration des équations de Navier-Stokes sur une section en travers [Réf Biblio].

Système de Saint-Venant 1D :

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x} = q_e & \text{équation de continuité} \\ \frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\beta Q^2}{S}\right)+gS\frac{\partial Z}{\partial x} = -gS(J+J_S)+k\,q_e V & \text{équation dynamique} \end{cases} \tag{16.20}$$

Remarque :

Il est important de noter que le système de Saint-Venant est constitué d'équations aux dérivées partielles non linéaires. En effet, la section mouillée *S* est directement fonction de la cote de la surface libre *Z*.

16.2. Annexe 2 : hyperbolicité du système de Saint-Venant

Équation de continuité :

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=q \tag{16.21}$$

Équation dynamique :

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\beta Q^2}{S}\right)+gS\frac{\partial Z}{\partial x}=-gSJ+kqV \tag{16.22}$$

Or :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\beta Q^2}{S}\right)=2\beta V\frac{\partial Q}{\partial x}+SV^2\frac{\partial \beta}{\partial x}-\beta V^2\frac{\partial S}{\partial x} \tag{16.23}$$

Donc :

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+2\beta V\frac{\partial Q}{\partial x}-\beta V^2\frac{\partial S}{\partial x}+gS\frac{\partial Z}{\partial x}+SV^2\frac{\partial \beta}{\partial x}=-gSJ+kqV \quad (16.24)$$

Si on pose :

$$B(x,z(x,t))=\int_{z_f}^{z(x,t)}\frac{\partial L}{\partial x}(x,z)dz \quad (16.25)$$

On a :

$$\frac{\partial S}{\partial x}=B+L\frac{\partial Z}{\partial x} \text{ soit } \frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{1}{L}\frac{\partial S}{\partial x}+\frac{B}{L} \quad (16.26)$$

d’autre part, comme β est une fonction de S et Q :

$$\frac{\partial \beta}{\partial x}=\frac{\partial \beta}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial x}+\frac{\partial \beta}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial x} \quad (16.27)$$

Avec (16.26) et (16.27) et en regroupant les termes, on obtient :

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\left(2\beta V+SV^2\frac{\partial \beta}{\partial Q}\right)\frac{\partial Q}{\partial x}+\left(\frac{gS}{L}-\beta V^2+SV^2\frac{\partial \beta}{\partial S}\right)\frac{\partial S}{\partial x}=-gSJ+kqV-\frac{B}{L} \quad (16.28)$$

Ce qui donne sous forme matricielle, avec U = (S, Q) :

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ \frac{gS}{L}-\left(\beta-S\frac{\partial \beta}{\partial S}\right)V^2 & 2\left(\beta+\frac{1}{2}Q\frac{\partial \beta}{\partial Q}\right)V\end{bmatrix}\frac{\partial U}{\partial x}=\begin{bmatrix}q\\ -gSJ+kqV-\frac{B}{L}\end{bmatrix} \quad (16.29)$$

soit encore :

$$\frac{\partial U}{\partial t}+A(U)\frac{\partial U}{\partial x}=F(U) \quad (16.30)$$

Le déterminant de A vaut : $\left(\beta-S\frac{\partial \beta}{\partial S}\right)V^2-g\frac{S}{L}$

Pour simplifier les formules on pose : $a=\beta-S\frac{\partial \beta}{\partial S}$ et $b=\beta+\frac{1}{2}Q\frac{\partial \beta}{\partial Q}$

On remarque que si β est constant égal à 1, a et b valent tous deux 1.
On peut alors réécrire (16.29) sous la forme :

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ \frac{gS}{L}-aV^2 & 2bV\end{bmatrix}\frac{\partial U}{\partial x}=\begin{bmatrix}q\\ gSJ+kqV-\frac{B}{L}\end{bmatrix} \quad (16.31)$$

Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme : $\lambda^2 - 2bV\lambda + (aV^2 - \frac{gS}{L}) = 0$

Son discriminant vaut : $\Delta = 4b^2V^2 - 4\left(aV^2 - \frac{gS}{L}\right) = 4\left((b^2-a)V^2 + \frac{gS}{L}\right)$

et, si $b^2 - a > 0$ [1] les valeurs propres sont réelles et définies par :

$$\lambda^+ = bV + \sqrt{(b^2-a)V^2 + \frac{gS}{L}} \quad \text{et} \quad \lambda^- = bV - \sqrt{(b^2-a)V^2 + \frac{gS}{L}} \tag{16.32}$$

λ^+ est toujours positive et λ^- est aussi positive si :

$$b^2V^2 > (b^2-a)V^2 + \frac{gS}{L} \text{ soit } aV^2 > \frac{gS}{L} \Leftrightarrow V^2 > \frac{gS}{aL} \Leftrightarrow Fr = \frac{V}{\sqrt{\frac{gS}{aL}}} > 1 \tag{16.33}$$

Et le système est donc strictement hyperbolique sauf si le nombre de Froude est égal à 1 (écoulement critique).
On redéfinit donc naturellement la célérité des ondes et le nombre de Froude par :

$$c = \sqrt{\frac{gS}{\left(\beta - S\frac{\partial\beta}{\partial S}\right)L}} \quad \text{et} \quad Fr = \frac{V}{c} \tag{16.34}$$

On peut réécrire les valeurs propres sous la forme :

$$\begin{aligned} \lambda^+ &= bV + \sqrt{b^2V^2 + a(c^2 - V^2)} = bV + \sqrt{(b^2-a)V^2 + ac^2} \\ \lambda^+ &= bV + bc\sqrt{\left(1 - \frac{a}{b^2}\right)Fr^2 + \frac{a}{b^2}} = b\left(V + c\sqrt{(1-\omega)Fr^2 + \omega}\right) \text{ avec } \omega = \frac{a}{b^2} \end{aligned} \tag{16.35}$$

De même :

$$\begin{aligned} \lambda^- &= bV - \sqrt{b^2V^2 + a(c^2 - V^2)} = bV - \sqrt{(b^2-a)V^2 + ac^2} \\ \lambda^- &= bV - bc\sqrt{\left(1 - \frac{a}{b^2}\right)Fr^2 + \frac{a}{b^2}} = b\left(V - c\sqrt{(1-\omega)Fr^2 + \omega}\right) \text{ avec } \omega = \frac{a}{b^2} \end{aligned} \tag{16.36}$$

Si le coefficient de quantité de mouvement β est égal à 1, a et b sont aussi égaux à 1 et on retrouve les définitions habituelles de la célérité, du nombre de Froude et des valeurs propres.
Le système (16.31) se réécrit sous la forme :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a(c^2 - V^2) & 2bV \end{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} = \begin{bmatrix} q \\ -gSJ + kqV - \frac{B}{L} \end{bmatrix} \tag{16.37}$$

1 C’est en particulier le cas si le coefficient de Boussinesq est choisi constant.

Les vecteurs propres de A sont définis par :

$$\left[A(U)-\lambda^{+} I\right]U^{+}=0 \text{ et } \left[A(U)-\lambda^{-} I\right]U^{-}=0 \tag{16.38}$$

donc en particulier :

$$-\lambda^{+} X^{+}+Y^{+}=0 \quad \text{et} \quad -\lambda^{-} X^{-}+Y^{-}=0 \quad \text{soit} \quad U^{+}=(1,\lambda^{+}) \quad \text{et} \quad U^{-}=(1,\lambda^{-}) \tag{16.39}$$

16.3. Annexe 3 : équations en (S, Q) sous forme conservative

Équation de continuité :

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=q \tag{16.40}$$

Équation dynamique :

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\beta Q^2}{S}\right)+gS\frac{\partial Z}{\partial x}=-gSJ+kqV \tag{16.41}$$

d'autre part :

$$\begin{gathered} S(x,z(x,t))=\int_{z_f}^{z(x,t)} L(x,z)dz \\ \Rightarrow \\ \frac{\partial S}{\partial x}(x,z(x,t))=\int_{z_f}^{z(x,t)}\frac{\partial L}{\partial x}(x,z)dz+L[x,z(x,t)]\frac{\partial Z}{\partial x}(x,t) \end{gathered} \tag{16.42}$$

Si on pose

$$B(x,z(x,t))=\int_{z_f}^{z(x,t)}\frac{\partial L}{\partial x}(x,z)dz \tag{16.43}$$

on a :

$$\frac{\partial S}{\partial x}=B+L\frac{\partial Z}{\partial x} \text{ soit } \frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{1}{L}\frac{\partial S}{\partial x}+\frac{B}{L} \tag{16.44}$$

Avec (16.44) on obtient :

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\beta Q^2}{S}\right)+\frac{gS}{L}\frac{\partial S}{\partial x}=-gSJ+kqV-\frac{B}{L} \tag{16.45}$$

On pose :

$$p(S)=\int_0^S\frac{gs}{L(s)}ds \tag{16.46}$$

en considérant la largeur L comme une fonction de la section mouillée S. Alors (16.45) devient :

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\beta Q^2}{S}\right)+\frac{\partial p(S)}{\partial x}=-gSJ+kqV-\frac{B}{L} \tag{16.47}$$

Sous forme conservative le système s'écrit finalement :

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} Q \\ \frac{\beta Q^2}{S}+p(S)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q \\ -gSJ+kqV-\frac{B}{L}\end{pmatrix} \tag{16.48}$$

Avec *U = (S, Q)*.

16.4. Annexe 4 : Stabilité du schéma de Preissmann

On se place dans le cas général des équations en S et Q discrétisées comme indiqué précédemment.

16.4.1. Principe de l'étude de stabilité par les séries de Fourier

On considère des solutions sous la forme :

$$f(x,t)=\sum_k f_k(t)\mathrm{e}^{ikx} \quad où \quad i=\sqrt{-1} \tag{16.49}$$

On a alors :

$$f(x+\Delta t)=\sum_k f_k(t)\mathrm{e}^{i.k(x+\Delta t)}=\sum_k f_k(t)\mathrm{e}^{i.kx}\,\mathrm{e}^{i.k\Delta x} \tag{16.50}$$

Dans le cas où l'opérateur différentiel est linéaire, le principe de superposition permet de ne considérer que des « solutions élémentaires » sans perdre de généralité :

$$f_j^m=f(j\Delta x,m\Delta t)=f_k(m\Delta t)\mathrm{e}^{i.k(j\Delta x)} \tag{16.51}$$

on peut alors écrire :

$$f_{j+1}^m=f((j+1)\Delta x,m\Delta t)=f_j^m\,\mathrm{e}^{i.k\Delta x} \tag{16.52}$$

Le principe de l'analyse de stabilité est d'écrire U_j^{n+1} sous la forme $|U_j^{n+1}|=\Gamma|U_j^n|$ en supposant que U_j^{n+1} est de la forme $f_j^m=f(j\Delta x,m\Delta t)=f_k(m\Delta t)\mathrm{e}^{ik(j\Delta x)}$ puis de montrer que le facteur d'amplification Γ est strictement inférieur à 1.

16.4.2. 1^er^ cas : équation scalaire à coefficient constant

Soit l'équation strictement hyperbolique suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t}+A\frac{\partial U}{\partial x}=F \text{ avec } A\equiv cte \text{ et } F\equiv cte \tag{16.53}$$

Le schéma de Preissmann s'écrit :

$$\frac{(U_j^{n+1}-U_j^n)+(U_{j+1}^{n+1}-U_{j+1}^n)}{2\Delta t}+A\left[(1-\theta)\frac{U_{j+1}^n-U_j^n}{\Delta x}+\theta\frac{U_{j+1}^{n+1}-U_j^{n+1}}{\Delta x}\right]=F \tag{16.54}$$

Soit :

$$\frac{(U_j^{n+1}-U_j^n)+(U_j^{n+1}-U_j^n)\mathrm{e}^{ik\Delta x}}{2\Delta t}+A\left[(1-\theta)\frac{U_j^n\mathrm{e}^{ik\Delta x}-U_j^n}{\Delta x}+\theta\frac{U_j^{n+1}\mathrm{e}^{ik\Delta x}-U_j^{n+1}}{\Delta x}\right]=F \tag{16.55}$$

soit encore :

$$\frac{(U_j^{n+1}-U_j^n)(1+e^{ik\Delta x})}{2\Delta t}-A\frac{(1-e^{ik\Delta x})}{\Delta x}[(1-\theta)U_j^n+\theta U_j^{n+1}]=F \tag{16.56}$$

Pour faire apparaitre un facteur d'amplification, on se place dans le cas homogène (F=0) et on écrit :

$$\left[\frac{(1+e^{ik\Delta x})}{2\Delta t}-\theta A\frac{(1-e^{ik\Delta x})}{\Delta x}\right]U_j^{n+1}=\left[\frac{(1+e^{ik\Delta x})}{2\Delta t}+(1-\theta)A\frac{(1-e^{ik\Delta x})}{\Delta x}\right]U_j^n$$

soit :

$$\left|\frac{(1+e^{ik\Delta x})}{2\Delta t}-\theta A\frac{(1-e^{ik\Delta x})}{\Delta x}\right|\left|U_j^{n+1}\right|=\left|\frac{(1+e^{ik\Delta x})}{2\Delta t}+(1-\theta)A\frac{(1-e^{ik\Delta x})}{\Delta x}\right|\left|U_j^n\right| \tag{16.57}$$

En multipliant par 2Δt et en mettant en facteur les exponentielles on obtient :

$$\begin{aligned}&\left|(1+e^{ik\Delta x})-A\frac{2\theta\Delta t}{\Delta x}(1-e^{ik\Delta x})\right|\left|U_j^{n+1}\right|\\ &\qquad=\left|(1+e^{ik\Delta x})+A\frac{2(1-\theta)\Delta t}{\Delta x}(1-e^{ik\Delta x})\right|\left|U_j^n\right|\\ &\left|\left(1-\frac{2\theta\Delta t}{\Delta x}A\right)+e^{ik\Delta x}\left(1+\frac{2\theta\Delta t}{\Delta x}A\right)\right|\left|U_j^{n+1}\right|\\ &\qquad=\left|\left(1+\frac{2(1-\theta)\Delta t}{\Delta x}A\right)+e^{ik\Delta x}\left(1-\frac{2(1-\theta)\Delta t}{\Delta x}A\right)\right|\left|U_j^n\right|\end{aligned} \tag{16.58}$$

On pose : $\alpha=\frac{2\Delta t}{\Delta x}A$ et $\sigma=1-\theta$

On obtient ainsi l'expression du coefficient d'amplification :

$$\Gamma=\frac{\left|(1-\sigma\alpha)e^{i.k\Delta x}+(1+\sigma\alpha)\right|}{\left|(1+\theta\alpha)e^{i.k\Delta x}+(1-\theta\alpha)\right|} \tag{16.59}$$

La condition de stabilité s'écrit alors : $\Gamma^2 < 1$; c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\Gamma^2&=\frac{\left|(1-\sigma\alpha)e^{ik\Delta x}+(1+\sigma\alpha)\right|^2}{\left|(1+\theta\alpha)e^{ik\Delta x}+(1-\theta\alpha)\right|^2}\\ &=\frac{\left[(1+\sigma\alpha)+(1-\sigma\alpha)\cos(k\Delta x)\right]^2+(1-\sigma\alpha)^2\sin^2(k\Delta x)}{\left[(1-\theta\alpha)+(1+\theta\alpha)\cos(k\Delta x)\right]^2+(1+\theta\alpha)^2\sin^2(k\Delta x)}\end{aligned} \tag{16.60}$$

soit encore en développant les carrés de gauche et en regroupant :

$$\begin{aligned}\Gamma^2&=\frac{(1+\sigma\alpha)^2+2(1+\sigma\alpha)(1-\sigma\alpha)\cos(k\Delta x)+(1-\sigma\alpha)^2}{(1-\theta\alpha)^2+2(1-\theta\alpha)(1+\theta\alpha)\cos(k\Delta x)+(1+\theta\alpha)^2}\\ &=\frac{(1+2\sigma\alpha+\sigma^2\alpha^2)+2(1-\sigma^2\alpha^2)\cos(k\Delta x)+(1-2\sigma\alpha+\sigma^2\alpha^2)}{(1-2\theta\alpha+\theta^2\alpha^2)+2(1-\theta^2\alpha^2)\cos(k\Delta x)+(1+2\theta\alpha+\theta^2\alpha^2)}\\ &=\frac{2(1+\sigma^2\alpha^2)+2(1-\sigma^2\alpha^2)\cos(k\Delta x)}{2(1+\theta^2\alpha^2)+2(1-\theta^2\alpha^2)\cos(k\Delta x)}\\ &=\frac{(1+\sigma^2\alpha^2)+(1-\sigma^2\alpha^2)\cos(k\Delta x)}{(1+\theta^2\alpha^2)+(1-\theta^2\alpha^2)\cos(k\Delta x)}\end{aligned} \tag{16.61}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^2 < 1 &\Leftrightarrow (1+\sigma^2\alpha^2)+(1-\sigma^2\alpha^2)\cos(k\Delta x)<(1+\theta^2\alpha^2)\cos(k\Delta x)\\ &\Leftrightarrow \sigma^2\alpha^2+(1-\sigma^2\alpha^2)\cos(k\Delta x)<\theta^2\alpha^2+(1-\theta^2\alpha^2)\cos(k\Delta x)\\ &\Leftrightarrow \sigma^2\alpha^2-\sigma^2\alpha^2\cos(k\Delta x)<\theta^2\alpha^2-\theta^2\alpha^2\cos(k\Delta x)\\ &\Leftrightarrow \sigma^2\alpha^2[1-\cos(k\Delta x)]<\theta^2\alpha^2[1-\cos(k\Delta x)]\\ &\Leftrightarrow (1-\theta)^2[1-\cos(k\Delta x)]<\theta^2[1-\cos(k\Delta x)] \text{ car } \alpha \neq 0\\ &\Leftrightarrow (1-2\theta)[1-\cos(k\Delta x)] < 0\end{aligned} \tag{16.62}$$

Or

$$(1-\cos(k\Delta x))>0 \quad \forall k \text{ et } \forall \Delta x \tag{16.63}$$

Donc

$$\Gamma^2<1 \Leftrightarrow 1-2\theta<0 \Leftrightarrow \theta>\frac{1}{2} \tag{16.64}$$

On retrouve finalement la condition de stabilité classique.

16.4.3. 2e cas : équation vectorielle à coefficients constants

Soit l'équation vectorielle strictement hyperbolique suivante :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}+\boldsymbol{A}\frac{\partial \vec{U}}{\partial x}=0 \text{ avec } \boldsymbol{A}\equiv cte \tag{16.65}$$

Ici $\vec{U}$ est un vecteur et **A** est une matrice carrée. Le schéma de Preissmann donne :

$$\frac{(U_j^{n+1}-U_j^n)+(U_{j+1}^{n+1}-U_{j+1}^n)}{2\Delta t}+\boldsymbol{A}\left[(1-\theta)\frac{U_{j+1}^n-U_j^n}{\Delta x}+\theta\frac{U_{j+1}^{n+1}-U_j^{n+1}}{\Delta x}\right] = 0 \tag{16.66}$$

Soit encore :

$$\frac{(1+e^{ik\Delta x})}{2\Delta t}(U_j^{n+1}-U_j^n)-\frac{(1-e^{ik\Delta x})}{2\Delta x}\boldsymbol{A}\left[(1-\theta)U_j^n+\theta U_j^{n+1}\right] = 0 \tag{16.67}$$

Ce qui s'écrit sous forme vectorielle :

$$\left[\frac{(1+e^{ik\Delta x})}{2\Delta t}\boldsymbol{I}-\theta\frac{(1-e^{ik\Delta x})}{2\Delta x}\boldsymbol{A}\right]U_j^{n+1} = \left[\frac{(1+e^{ik\Delta x})}{2\Delta t}\boldsymbol{I}+(1-\theta)\frac{(1-e^{ik\Delta x})}{2\Delta x}\boldsymbol{A}\right]U_j^n \tag{16.68}$$

En multipliant par $\frac{2\Delta t}{(1+e^{ik\Delta x})}$ il vient :

$$\left[\boldsymbol{I}-\frac{2\theta\Delta t(1-e^{ik\Delta x})}{\Delta x(1+e^{ik\Delta x})}\boldsymbol{A}\right]U_j^{n+1} = \left[\boldsymbol{I}+\frac{2(1-\theta)\Delta t(1-e^{ik\Delta x})}{\Delta x(1+e^{ik\Delta x})}\boldsymbol{A}\right]U_j^n \tag{16.69}$$

Le crochet du membre de gauche est une matrice dont il convient de se demander si elle est inversible.

d'une part on a : $\frac{(1-e^{ik\Delta x})}{(1+e^{ik\Delta x})}=-i\frac{\sin(k\Delta x)}{1+\cos(k\Delta x)}$ on pose alors : $\Omega=\frac{\sin(k\Delta x)}{1+\cos(k\Delta x)}$

alors l'équation précédente devient :

$$\left[\boldsymbol{I}+i\frac{2\theta\Omega\Delta t}{\Delta x}\boldsymbol{A}\right]U_j^{n+1}=\left[\boldsymbol{I}-i\frac{2(1-\theta)\Omega\Delta t}{\Delta x}\boldsymbol{A}\right]U_j^n \tag{16.70}$$

L'inversibilité de la matrice du 1er membre se démontre de la façon suivante. Si elle ne l'est pas C'est que :

$$det\left[\boldsymbol{I}+i\frac{2\theta\Omega\Delta t}{\Delta x}\boldsymbol{A}\right]=0\Leftrightarrow det\left[i\lambda\left(i\lambda^{-1}\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}\right)\right]=0 \text{ avec } \lambda=\frac{2\theta\Omega\Delta t}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow -\lambda^2 det\left[\boldsymbol{A}-i\lambda^{-1}\boldsymbol{I}\right]=0 \tag{16.71}$$

C'est-à-dire que iλ est valeur propre de A, ce qui est impossible puisque les valeurs propres de A sont réelles (système hyperbolique).

On peut donc écrire :

$$U_j^{n+1}=\left[\boldsymbol{I}+i\frac{2\theta\Omega\Delta t}{\Delta x}\boldsymbol{A}\right]^{-1}\left[\boldsymbol{I}-i\frac{2(1-\theta)\Omega\Delta t}{\Delta x}\boldsymbol{A}\right]U_j^n \tag{16.72}$$

En passant à la norme, on obtient :

$$\left\|U_j^{n+1}\right\| \leq \left\|\left[\boldsymbol{I}+i\frac{2\theta\Omega\Delta t}{\Delta x}\boldsymbol{A}\right]^{-1}\right\|\cdot\left\|\boldsymbol{I}-i\frac{2(1-\theta)\Omega\Delta t}{\Delta x}\boldsymbol{A}\right\|\left\|U_j^n\right\| \tag{16.73}$$

On pose : $\omega=\frac{2\Omega\Delta t}{\Delta x}$ et l'inégalité précédente devient :

$$\left\|U_j^{n+1}\right\| \leq \left\|\left[\boldsymbol{I}+i\theta\omega\boldsymbol{A}\right]^{-1}\right\|\cdot\left\|\boldsymbol{I}-i(1-\theta)\omega\boldsymbol{A}\right\|\left\|U_j^n\right\| \tag{16.74}$$

On a donc finalement le facteur d'amplification :

$$\Gamma=\left\|\left[\boldsymbol{I}+i\theta\omega\boldsymbol{A}\right]^{-1}\right\|\cdot\left\|\left[\boldsymbol{I}-i(1-\theta)\omega\boldsymbol{A}\right]\right\| \tag{16.75}$$

Remarque : On peut vérifier ici le calcul fait pour la dimension 1. Dans ce cas le facteur d'amplification précédent se réduit à :

$$\Gamma=\frac{\left|1-i(1-\theta)\omega A\right|}{\left|1+i\theta\omega A\right|}=\frac{1+(1-\theta)^2\omega^2A^2}{1+\theta^2\omega^2A^2} \tag{16.76}$$

Donc

$$\Gamma<1\Leftrightarrow 1+(1-\theta)^2\omega^2A^2<1+\theta^2\omega^2A^2\Leftrightarrow(1-\theta)^2<\theta^2\Leftrightarrow 1-2\theta<0\Leftrightarrow\theta>\frac{1}{2} \tag{16.77}$$

En dimension quelconque, on a :

$$\Gamma<\rho\left(\left[\boldsymbol{I}+i\theta\omega\boldsymbol{A}\right]^{-1}\right)\cdot\rho\left(\boldsymbol{I}-i(1-\theta)\omega\boldsymbol{A}\right) \tag{16.78}$$

De façon générale :

$$\rho(\boldsymbol{I}+\alpha\boldsymbol{A})=\underset{j}{Max}\left\{1+\alpha\lambda_j\right\} \text{ où } \lambda_j \text{ sont les valeurs propres de } \boldsymbol{A} \tag{16.79}$$

En effet :

$$0 = det(\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{I}) = det\left(\frac{1}{\alpha}\cdot(\alpha\boldsymbol{A}-\alpha\lambda_j\boldsymbol{I})\right) = \left(\frac{-1}{\alpha}\right)^n det\left(\boldsymbol{I}+\alpha\boldsymbol{A}-(1+\alpha\lambda_j)\boldsymbol{I}\right) \tag{16.80}$$

On a donc :

$$\Gamma<1 \Leftrightarrow \frac{\underset{j}{Maj}\{|1-i(1-\theta)\omega\lambda_j|\}}{\underset{j}{Min}\{|1+i\theta\omega\lambda_j|\}} < 1 \Leftrightarrow \frac{\underset{j}{Maj}\{1+(1-\theta)^2\omega^2\lambda_j^2\}}{\underset{j}{Min}\{1+\theta^2\omega^2\lambda_j^2\}} < 1$$

$$\Leftrightarrow [1+(1-\theta)^2\omega^2\lambda_+^2] < [1+\theta^2\omega^2\lambda_-^2] \text{ avec } |\lambda_+| = \underset{j}{Max}\{|\lambda_j|\} \; et \; |\lambda_-| = \underset{j}{Min}\{|\lambda_j|\}$$

$$\Gamma<1 \Leftrightarrow (1-\theta)^2<\theta^2\frac{\lambda_-^2}{\lambda_+^2} \Leftrightarrow 1-2\theta+\left(1-\frac{\lambda_-^2}{\lambda_+^2}\right)\cdot\theta^2<0 \tag{16.81}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\left|\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right|}{1-\frac{\lambda_-^2}{\lambda_+^2}} < \theta < \frac{1+\left|\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right|}{1-\frac{\lambda_-^2}{\lambda_+^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{1+\left|\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right|} < \theta < \frac{1}{1-\left|\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right|}$$

Finalement : **Le schéma de Preissmann est stable si**

$$1-\left|\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right| < \theta^{-1} < 1+\left|\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right| \tag{16.82}$$

Remarque 1 : Dans le cas monodimensionnel, on retrouve bien la condition habituelle :

$$\theta>\frac{1}{2} \text{ avec } \lambda_+=\lambda_- \tag{16.83}$$

Remarque 2 : Si on considère que ce résultat est valable dans le cas des équations de St Venant en formulation (S, V), alors on a : $\lambda_+=v+c$ et $\lambda_-=v-c$. Ce qui donne la condition suivante :

$$\frac{1}{1+\frac{|v-c|}{v+c}} < \theta < \frac{1}{1-\frac{|v-c|}{v+c}} \Leftrightarrow \frac{v+c}{2c} < \theta < \frac{v+c}{2v} \text{ si } v<c \text{ c'est à dire } Fr<1 \tag{16.84}$$

Soit, en fonction du nombre de Froude :

$$\frac{1+Fr}{2} < \theta < \frac{1+Fr^{-1}}{2} \Leftrightarrow 1+Fr < 2\theta < 1+Fr^{-1} \tag{16.85}$$

Pour $Fr=\frac{1}{2}$ on trouve $\frac{3}{4} < \theta < \frac{3}{2}$ ce qui est sensiblement différent de la condition que l'on vérifie habituellement. Pour valider ces considérations, il reste toutefois à établir une condition du même type dans le cas non linéaire avec 2[e] membre (***A*** et ***F*** fonctions de *U*)

Remarque 3 : Dans ce qui précède, aucune hypothèse n'a été faite sur le fait que Δx soit constant en fonction de x. Tous les calculs précédents restent donc valables pour un pas d'espace variable.

16.5. Annexe 5 : discrétisation en régime permanent

On discrétise l'équation

$$\frac{\partial(\beta Q^2/S)}{\partial x}+gS\frac{\partial Z}{\partial x}=-gSJ+kqV \tag{16.86}$$

On pose : $\frac{\beta}{S}=\psi$ ce qui donne :

$$\frac{\partial(\beta Q^2/S)}{\partial x}=\frac{\partial(\psi Q^2)}{\partial x}=2Q\psi\frac{\partial Q}{\partial x}+Q^2\frac{\partial\psi}{\partial x}=2Q.\psi.q+Q^2\frac{\partial\psi}{\partial x}$$
$$\text{avec } q=\frac{\partial Q}{\partial x}=\sum\text{apports latéraux} \tag{16.87}$$

On obtient alors :

$$gS\frac{\partial Z}{\partial x}=-gSJ-Q^2\frac{\partial\psi}{\partial x}-2Q\psi q+kqV$$
$$\text{soit :}$$
$$\frac{\partial Z}{\partial x}=-J-\frac{Q^2}{gS}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{q}{g}\left(k.\frac{V}{S}-2.V.\psi\right) \tag{16.88}$$
$$\text{Or } \beta=\psi S\Rightarrow V\psi=V\frac{\beta}{S}=\beta\frac{V}{S} \text{ donc :}$$
$$\frac{\partial Z}{\partial x}=-J-\frac{1}{g}QV\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{1}{g}q\frac{V}{S}(2\beta-k)$$

Avec un simple schéma amont on obtient, en allant de l'aval vers l'amont :

$$\frac{Z_i-Z_{i+1}}{-\Delta x}=-J-\frac{1}{g}QV\frac{\psi_{i+1}-\psi_i}{\Delta x}-\frac{1}{g}q\frac{V}{S}(2\beta-k)$$
$$\text{soit :} \tag{16.89}$$
$$Z_i=Z_{i+1}+\Delta x\left[J+\frac{1}{g}QV\frac{\psi_{i+1}-\psi_i}{\Delta x}+\frac{1}{g}q\frac{V}{S}(2\beta-k)\right]$$

16.6. Annexe 6 : Les conditions de convergence des itérations

À rédiger.